

Distributions propres invariantes sur la paire symétrique $(\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$

Pascale Harinck*

Nicolas Jacquet†

Résumé

We study orbital integrals and invariant eigendistributions for the symmetric pair $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$. Let $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ and let \mathcal{N} be the set of nilpotents of \mathfrak{q} . We first obtain an asymptotic behavior of orbital integrals around nonzero semisimple elements of \mathfrak{q} . We study eigendistributions around such elements and give an explicit basis of eigendistributions on $\mathfrak{q} - \mathcal{N}$ given by a locally integrable function on $\mathfrak{q} - \mathcal{N}$.

Keywords : symmetric pair, orbital integral, invariant eigendistribution

Introduction

Dans cet article, nous étudions les intégrales orbitales des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact et les distributions propres invariantes pour la paire symétrique $(\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$.

De tels objets sont parfaitement décrits pour les algèbres de Lie réductives \mathfrak{g}_1 (correspondant à la paire symétrique $(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1, \text{diagonale})$) par les travaux d'Harish-Chandra puis de A. Bouaziz, et pour les paires symétriques de rang 1 à travers les travaux de nombreux auteurs dont P.D. Méthé, A. Tengstrand, J. Faraut et G. van Dijk. Par ailleurs, J. Sekiguchi a déterminé la liste des paires symétriques pour lesquelles il n'existait pas de distributions propres invariantes à support dit singulier c'est-à-dire dans le complémentaire dans \mathfrak{q} de l'ouvert dense \mathfrak{q}^{reg} des éléments réguliers de \mathfrak{q} .

Hormis ces situations, les propriétés des intégrales orbitales et des distributions propres invariantes sont peu connues dans le cadre général des paires symétriques quelconques. Le travail présenté ici donne un premier exemple d'étude précise et explicite de tels objets pour une paire symétrique de rang supérieure à 2.

*Ecole Polytechnique, CMLS- CNRS UMR 7640, Route de Saclay 91128 Palaiseau Cédex, harinck@math.polytechnique.fr

†Lycée Jean-Baptiste Corot, 9 Place Davout, 91600 Savigny-sur-Orge, nclsjacquet@gmail.com

On considère le groupe $G = GL(4, \mathbb{R})$ et son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ munis de l'involution σ définie par $\sigma(X) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$, où I_2 est la matrice identité 2×2 . Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition de \mathfrak{g} relative en sous-espaces propres pour σ associés respectivement à $+1$ et -1 et $H = GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ le sous-groupe de G des points fixés par σ .

L'intégrale orbitale d'une fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{q})$ est la moyenne de f sur les H -orbites des éléments semi-simples réguliers de \mathfrak{q} . Nous précisons tout d'abord le comportement des intégrales orbitales au voisinage de tout point semi-simple non nul. On note \mathcal{N} le cône des éléments nilpotents de \mathfrak{q} et on fixe un caractère χ régulier de l'algèbre $S(\mathfrak{q})^H$ des opérateurs H -invariants à coefficients constants sur \mathfrak{q} . Nous obtenons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction localement intégrable sur $\mathcal{U} = \mathfrak{q} - \mathcal{N}$ définisse une distribution T_F invariante et propre pour le caractère χ sur \mathcal{U} , c'est-à-dire satisfaisant, pour tout $P \in S(\mathfrak{q})^H$, la relation $\partial(P)T_F = \chi(P)T_F$ sur \mathcal{U} . Nous déduisons une base de distributions invariantes, propres pour le caractère χ sur \mathcal{U} données par une fonction localement intégrable sur \mathcal{U} et nous ferons quelques commentaires sur l'extension de ces solutions sur \mathfrak{q} .

La paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ figure dans la liste de J. Sekiguchi et correspond à la situation tangente de l'espace symétrique $GL(4, \mathbb{R})/GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$. Des résultats partiels concernant intégrales orbitales et distributions sphériques sur $GL(4, \mathbb{R})/GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ ont été annoncés par S. Kato et S. Aoki dans ([1]), mais aucune preuve n'est explicitement donnée dans leur article ce qui ne nous a pas permis de comparer nos résultats.

Précisons le contenu de cet article.

La première partie est consacrée à l'étude des orbites sous H des éléments semi-simples et des sous-espaces de Cartan de \mathfrak{q} (c'est-à-dire formé d'éléments semi-simples de \mathfrak{q} , abélien et maximal pour ces propriétés). Les H -orbites semi-simples de \mathfrak{q} sont uniquement déterminées par les polynômes $Q(X) = \text{tr}(X^2)/2$ et $S(X) = \det(X)$ qui forment une base de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$ des polynômes H -invariants sur \mathfrak{q} , ou encore par les valeurs propres $u(X)$ et $v(X)$ de YZ si $X = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix}$. Les fonctions u et v satisfont les relations $u + v = Q$ et $uv = S$.

La paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est de rang 2 et possède 4 classes de conjugaison sous H de sous-espaces de Cartan selon la nature des valeurs propres $u(X)$ et $v(X)$: \mathfrak{a}_{++} , \mathfrak{a}_{+-} et \mathfrak{a}_{--} sur lesquels les fonctions u et v prennent des valeurs réelles de signe constant et \mathfrak{a}_2 sur lequel u et v sont complexes conjuguées. L'ensemble \mathfrak{q}^{reg} est formé des éléments semi-simples X dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes ce qui équivaut à la condition $u(X)v(X)(u(X) - v(X)) \neq 0$. Le système de racines de chaque sous-espace de Cartan comporte deux racines positives de multiplicité 1 dont les carrés sont les fonctions $4u$ et $4v$, et deux racines de multiplicité 2 dont le produit

est, à une fonction localement constante sur \mathfrak{q}^{reg} près, la fonction $u - v$. Nous mettons en évidence des symétries entre ces sous-espaces de Cartan et définissons un isomorphisme H -invariant ϖ de \mathfrak{q} qui renverse l'ordre d'Hirai.

Nous souhaitons étudier le comportement des intégrales orbitales et des distributions propres invariantes au voisinage des points semi-simples non nuls et non réguliers. Ces éléments, appelés semi-réguliers, sont les éléments semi-simples $X \in \mathfrak{q}$ pour lesquels une et une seule des trois valeurs $u(X)$, $v(X)$ ou $u(X) - v(X)$ est nulle ou de manière équivalente qui sont à l'intersection d'exactly deux sous espaces de Cartan.

Le paragraphe 1.4 est consacré à l'étude des centralisateurs des éléments semi-réguliers. Tout élément semi-régulier annulé par une racine de multiplicité 1 (ce qui correspond à la situation $u(X) = 0$ ou bien $v(X) = 0$ avec $u(X) \neq v(X)$) est conjugué sous H à un élément de $\mathfrak{a}_{++} \cap \mathfrak{a}_{+-}$ ou de $\mathfrak{a}_{+-} \cap \mathfrak{a}_{--}$. Soient \mathfrak{z}_1 et \mathfrak{z}_2 les centralisateurs dans \mathfrak{g} de chacun de ces deux espaces. Alors $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$ est une sous-algèbre de Lie σ -stable de \mathfrak{g} et la sous-paire symétrique $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$ est isomorphe au produit de deux copies H -conjuguées de $(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}))$. Les éléments semi-réguliers annulés par une racine de multiplicité 2 (ce qui correspond à la situation $u(X) - v(X) = 0$ et $u(X)v(X) \neq 0$) sont tous H -conjugués à un élément de $\mathfrak{a}_{++} \cap \mathfrak{a}_2$ ou de $\varpi(\mathfrak{a}_{++} \cap \mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_{--} \cap h_0 \cdot \mathfrak{a}_2$ où $h_0 \in H$. Soit \mathfrak{z}_3 et \mathfrak{z}_4 les centralisateurs respectifs de ces deux espaces. On a alors les isomorphismes $(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{h}) \simeq (\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), diagonale)$ et $(\mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_4 \cap \mathfrak{h}) \simeq (\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}), \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$. De plus, on a $\mathfrak{q} = \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_4$.

L'intégrale orbitale $\mathcal{M}(f)$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathfrak{q})$ est la fonction H -invariante de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathfrak{q}^{reg} donnée pour $X \in \mathfrak{q}^{reg}$ par $\mathcal{M}(f)(X) = |\delta(X)| \int_{H/Z_H(X)} f(h \cdot X) d\dot{h}$, où $\delta(X) = u(X) - v(X)$ et $Z_H(X)$ est le centralisateur de X dans H .

Pour étudier le comportement de $\mathcal{M}(f)$ au voisinage des points semi-simples non nuls, nous généralisons tout d'abord les résultats de T. Tengstrand et J. Faraut concernant les intégrales orbitales sur les hyperboloïdes (espace symétrique de rang 1). Ceci fait l'objet de la partie 2. Etant donné une forme quadratique \mathcal{Q} sur \mathbb{R}^n , la fonction moyenne $M_{\mathcal{Q}}(f)$ de $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ introduite par J. Faraut ([6] appendice) est l'application $M_{\mathcal{Q}}(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ vérifiant pour tout $F \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, la relation $\int_{\mathbb{R}^n} F \circ \mathcal{Q}(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} F(t) M_{\mathcal{Q}}(f)(t) dt$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a $M_{\mathcal{Q}}(f)(t) = \phi_0(t) + \eta(t)\phi_1(t)$, où ϕ_0 et ϕ_1 sont des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans \mathbb{R} et η est une fonction singularité dépendant de la signature de la forme quadratique \mathcal{Q} .

Nous généralisons ce résultat pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ en montrant qu'il existe Φ_0 et Φ_1 dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*$, la relation $M_{\mathcal{Q}}(f(x, \cdot))(t) = \Phi_0(x, t) + \eta(t)\Phi_1(x, t)$, et toute fonction du

type $\Phi_0(x, t) + \eta(t)\Phi_1(x, t)$ avec Φ_0 et Φ_1 dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ est l'image $M_Q(f(x, \cdot))(t)$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ (Théorèmes 2.1.2 et 2.1.3). Nous considérons également la moyenne $M_{Q'}(x \mapsto M_Q(f(x, \cdot)))(t', t)$ relative à une forme quadratique Q' de \mathbb{R}^m (Théorèmes 2.2.1 et 2.2.1).

En adaptant la méthode de descente d'Harish-Chandra à la paire symétrique $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$, nous en déduisons le comportement des intégrales orbitales simultanément au voisinage des points non nuls de $\mathfrak{a}_{++} \cap \mathfrak{a}_{+-}$ et $\mathfrak{a}_{+-} \cap \mathfrak{a}_{--}$ (théorème 3.3.1) :

Soit \mathcal{H}_{\log}^2 l'espace des fonctions sur $(\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$ de la forme $\varphi_0(t_1, t_2) + \log |t_1| \varphi_1(t_1, t_2) + \log |t_2| \varphi_1(t_2, t_1) + \log |t_1| \log |t_2| \varphi_2(t_1, t_2)$ avec $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 - \text{diag})$ et φ_0, φ_2 symétriques.

Soit $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}} = H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{q}; Q^2(X) - 4S(X) > 0\}$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$, il existe une unique fonction $F_f \in \mathcal{H}_{\log}^2$ telle que pour $X \in H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$, l'on ait $\mathcal{M}(f)(X) = F_f(u(X), v(X))$ et l'application $f \mapsto F_f$ est surjective de $\mathcal{C}_c^\infty(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ dans \mathcal{H}_{\log}^2 .

Les autres points semi-réguliers correspondent à la situation $u(X) = v(X)$ et sont conjugués à un élément de $\mathfrak{a}_{++} \cap \mathfrak{a}_2$ ou de $h_0 \cdot \mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{a}_{--}$ avec $h_0 \in H$. Contrairement à la situation précédente, ces deux cas ne peuvent être traités simultanément mais se déduisent l'un de l'autre par l'isomorphisme ϖ de \mathfrak{q} . La méthode de descente classique de Harish-Chandra donne le résultat suivant.

Soit Y la fonction d'Heaviside et soit \mathcal{H}_Y^{pair} l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de la forme $a(\tau, w) + Y(-w)|w|^{1/2}b(\tau, w)$ avec $a, b \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\})$ paires par rapport à τ . On note $\mathcal{U}_3 = H \cdot \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{q}; S(X) > 0 \text{ et } Q(X) > -2\sqrt{S(X)}\}$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{U}_3)$, il existe une unique fonction $G_f \in \mathcal{H}_Y^{pair}$ telle que $\mathcal{M}(f)(X) = G_f(\tau, w)$, ceci pour tout $X \in \mathcal{U}_3 \cap \mathfrak{q}^{reg}$ tels que, pour $\frac{Q(X)}{2} + \sqrt{S(X)} = \tau^2$ et $\frac{Q(X)}{2} - \sqrt{S(X)} = w$ avec $\tau^2 > w$. De plus l'application $f \mapsto G_f$ est surjective de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{U}_3)$ dans \mathcal{H}_Y^{pair} .

Les deux dernières parties sont consacrées à l'étude des distributions propres invariantes sur \mathfrak{q} . On fixe un caractère χ de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}[Q, S] \simeq S(\mathfrak{q})^H$ donné par deux complexes λ_1 et λ_2 vérifiant $\chi(Q) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\chi(S) = \lambda_1 \lambda_2$ avec $\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$.

Dans la partie 4, nous décrivons les solutions analytiques du système suivant : $(E_\chi(\mathfrak{q}^{reg}))$ pour tout $P \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$ alors $\partial(P)F = \chi(P)F$ sur \mathfrak{q}^{reg} .

On fixe un sous-espace de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{q} dont on note $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ le quotient du normalisateur de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $H_{\mathbb{C}}$ par son centralisateur. Les opérateurs de Dunkl permettent de décrire l'action des composantes radiales des opérateurs $\partial(Q)$ et $\partial(S)$ sur l'espace des fonctions $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ -invariantes. Plus précisément, notons α_1 et α_2 les racines de multiplicité 1 de \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} , alors, la fonction H -invariante F sur \mathfrak{q}^{reg} satisfait le système $(E_\chi(\mathfrak{q}^{reg}))$

si et seulement si, pour tout sous-espace de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{q} , on a

$$\begin{cases} (\partial(Q)F)_{/\mathfrak{a}^{reg}} = \delta^{-1} \circ (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}) \circ \delta(F_{/\mathfrak{a}^{reg}}) = (\lambda_1 + \lambda_2)F_{/\mathfrak{a}^{reg}} \\ (\partial(S)F)_{/\mathfrak{a}^{reg}} = \delta^{-1} \circ (L_{\alpha_1} L_{\alpha_2}) \circ \delta(F_{/\mathfrak{a}^{reg}}) = (\lambda_1 \lambda_2)F_{/\mathfrak{a}^{reg}} \end{cases}$$

où $L_{\alpha_i} = \frac{1}{4\alpha_i} \partial(\alpha_i)(\alpha_i \partial(\alpha_i))$. Cet opérateur est la composante radiale de l'opérateur de Laplace de la paire symétrique de rang un $(\mathfrak{so}(2, 1), \mathfrak{so}(1, 1))$ (appendice A de [5]) lorsque la racine α_i est réelle ou imaginaire.

Les opérateurs L_{α_1} et L_{α_2} commutent car α_1 et α_2 sont orthogonales, ainsi le système précédent se ramène à l'étude de $\ker(L_{\alpha_j} - \lambda id)$ pour $j = 1, 2$. Via le changement de variable $z = \alpha_j^2$, nous montrons que ses solutions s'expriment à l'aide des solutions d'une part sur \mathbb{C} et d'autre part sur \mathbb{R} de l'équation de type Bessel ($E_{\mathbb{C}}$) $L_c \Phi = 4z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 4 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \lambda \Phi$.

Un système fondamental de l'espace $Sol(L_c, \lambda)$ des solutions de ($E_{\mathbb{C}}$) sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ est donné par une fonction Φ_λ analytique sur \mathbb{C} et une fonction $W_\lambda(z) = w_\lambda(z) + \log(z)\Phi_\lambda(z)$ où $\log(z)$ désigne la détermination principale du logarithme et w_λ est une fonction analytique sur \mathbb{C} . L'espace des solutions $Sol(L, \lambda)$ sur \mathbb{R}^* de l'équation $4t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \lambda \Phi$ est engendré par les fonctions $\Phi_\lambda(t)$ et $W_\lambda^r(t) = w_\lambda(t) + \log|t|\Phi_\lambda(t)$ avec $t \in \mathbb{R}^*$. On constate en particulier que la solution $W_\lambda(z)$ ne se prolonge pas sur \mathbb{R}^* en $W_\lambda^r(t)$ ce qui joue un rôle important par la suite.

La fonction F solution de $(E_\chi(\mathfrak{q}^{reg}))$ s'écrit alors sur chaque composante connexe de \mathfrak{q}^{reg} comme combinaison linéaire de fonctions $\frac{A(u(X))B(v(X))}{u(X) - v(X)}$ et $\frac{A(v(X))B(u(X))}{u(X) - v(X)}$ où (A, B) parcourt $Sol(L, \lambda_1) \times Sol(L, \lambda_2)$ lorsque $u(X)$ et $v(X)$ sont réelles et $Sol(L_c, \lambda_1) \times Sol(L_c, \lambda_2)$ sinon.

Dans la partie 5, nous considérons une solution F du système $(E_\chi(\mathfrak{q}^{reg}))$. Nous cherchons des conditions nécessaires et suffisantes pour que la distribution $T_{\partial(P)F} - \partial(P)T_F$ soit nulle pour tout $P \in S(\mathfrak{q})^H$. Comme dans le cas du groupe ([10]), la formule d'intégration de Weyl permet une étude sur chaque sous-espace de Cartan. Une intégration par parties tenant compte du comportement des intégrales orbitales obtenu précédemment nous permet de dégager des conditions nécessaires qui portent sur le comportement de F au voisinage des points semi-réguliers.

Nous étudions tout d'abord les conditions nécessaires successivement sur les ouverts $\mathcal{U}_m = H \cdot {}^\lambda \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, $\mathcal{U}_3 = H \cdot {}^\lambda (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$ et $\varpi(\mathcal{U}_3) = H \cdot \varpi({}^\lambda (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}))$ qui forment un recouvrement ouvert de $\mathfrak{q} - \mathcal{N} = \mathcal{U}$.

Sur l'ouvert \mathcal{U}_m , la partie 4 assure qu'il existe une fonction $\Psi_m \in C^\infty((\mathbb{R}^*)^2 - diagonale)$, symétrique telle que, pour $X \in \mathcal{U}_m \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on ait $F(X) = \Psi_m(t_1, t_2)/|t_1 - t_2|$ avec $\{u(X), v(X)\} = \{t_1, t_2\} \subset (\mathbb{R}^*)^2 - diagonale$.

La fonction Ψ_m et les intégrales orbitales d'une fonction de $C_c^\infty(\mathcal{U}_m)$ ont des singularités de type $\log|t_j|$. Nous obtenons des conditions de recollement analogues à celles de J.Faraut pour un hyperboloïde à une nappe ([6]) qui

s'expriment de la manière suivante :

Si u est une fonction de la forme $u(t) = v(t) + \log |t|w(t)$, où $v, w \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*)$ admettent, ainsi que leurs dérivées, des limites à droite et à gauche en 0. On pose $u^{[1]}(t) = tu'(t)$ et $u^{[0]}(t) = u(t) - \log |t|u^{[1]}(t)$, de telle sorte que $\lim_{t \rightarrow 0^\pm} u^{[1]}(t) = w(0^\pm)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^\pm} u^{[0]}(t) = v(0^\pm)$. Alors pour tout $j \in \{0, 1\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a (proposition 5.2.1)

$$(\Psi_m(t, \cdot))^{[j]}(0^+) = (\Psi_m(t, \cdot))^{[j]}(0^-) \text{ et } (\Psi_m(\cdot, t))^{[j]}(0^+) = (\Psi_m(\cdot, t))^{[j]}(0^-).$$

On note pour f et g deux fonctions d'une variable complexe, $S^+(f, g)(z_1, z_2) = f(z_1)g(z_2) + f(z_2)g(z_1)$ et $[f, g](z_1, z_2) = f(z_1)g(z_2) - f(z_2)g(z_1)$. On obtient alors (corollaire 5.2.1) que la fonction Ψ_m est combinaison linéaire de fonctions $S^+(A, B)(t_1, t_2)$ et $\text{signe}(t_1 - t_2)[A, B](t_1, t_2)$ lorsque (A, B) parcourt $\text{Sol}(L, \lambda_1) \times \text{Sol}(L, \lambda_2)$.

Pour l'étude sur l'ouvert \mathcal{U}_3 , on définit la fonction $(\Psi_m)_r$ sur $\{(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2; \tau^2 \neq \theta^2\}$ par $(\Psi_m)_r(\tau, \theta) = \Psi_m((\tau + \theta)^2, (\tau - \theta)^2)$ et la fonction Ψ_2 paire en chaque variable sur $(\mathbb{R}^*)^2$ par $\Psi_2(\tau, \theta) = (u - v)(X_{\tau, \theta})F(X_{\tau, \theta})$ où l'orbite $H \cdot X_{\tau, \theta}$ est caractérisé par $\{(\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2\}$. Les conditions nécessaires obtenues sont alors (proposition 5.2.3)

$$\forall \tau \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta}(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) - \frac{\partial}{\partial \theta}\Psi_2(\tau, 0^+) = 0 \\ \Psi_2(\tau, 0^+) = 0 \end{cases}.$$

ce qui donne les expressions suivantes des fonctions ψ_m et ψ_2 (corollaire 5.2.2) :

$$\begin{aligned} &\text{pour } t_1 > t_2 > 0 \text{ alors } \Psi_m(t_1, t_2) = \Psi^+(t_1, t_2) + i\Psi_c(t_1, t_2) \\ &\text{pour } \tau > 0 \text{ et } \theta > 0 \text{ alors } \Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c(u(X_{\tau, \theta}), v(X_{\tau, \theta})), \end{aligned}$$

où $\Psi^+ \in \text{Vect}\langle S^+(A, B); (A, B) \in \text{Sol}(L, \lambda_1) \times \text{Sol}(L, \lambda_2) \rangle$ et $\Psi_c \in \text{Vect}\langle [A, B]; (A, B) \in \text{Sol}(L_c, \lambda_1) \times \text{Sol}(L_c, \lambda_2) \rangle$

On utilise ensuite l'application ϖ , pour obtenir les conditions de recollement et les fonctions correspondantes sur $\varpi(\mathcal{U}_3)$.

La synthèse des résultats précédents permet de décrire une base de l'espace des distributions propres invariantes sur $\mathcal{U} = \mathfrak{q} - \mathcal{N}$ définies par une fonction localement intégrable sur \mathcal{U} . Celle-ci est donnée par les fonctions suivantes (théorème 5.2.2) :

- (1) La fonction analytique $F_{ana} = \frac{[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v)}{u - v}$ qui s'exprime également sous la forme $f(Q, S)$ où f est analytique sur \mathbb{R}^2 . Cette distribution est propre invariante sur \mathfrak{q} tout entier.
- (2) La fonction $F_{sing} = \frac{[\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}](u, v) + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v) + \log |uv|[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v)}{u - v}$ qui s'exprime également sous la forme $f(Q, S) + \log |S|g(Q, S)$ où f et g sont analytiques sur \mathbb{R}^2 . Cette fonction est localement intégrable sur \mathfrak{q} .

(3) Les fonctions du type $F_{A,B}^+ = Y(Q^2 - 4S) \frac{A(u)B(v) + A(v)B(u)}{u-v}$, où Y désigne la fonction d'Heaviside et (A, B) parcourt $\mathcal{Sol}(L, \lambda_1) \times \mathcal{Sol}(L, \lambda_2)$.

Ces résultats sont partiels et montrent la limite de la méthode de descente. D'une part, nous n'obtenons pas le comportement des intégrales orbitales au voisinage de 0 et ceci est nécessaire pour savoir si les fonctions F_{sing} et $F_{A,B}^+$ se prolongent en des distributions propres invariantes sur \mathfrak{q} tout entier. Par ailleurs, les restrictions à $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ des fonctions obtenues n'ont aucun lien avec les distributions propres invariantes pour la paire symétrique $(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{h}) \simeq \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$.

Ainsi, notre étude montre que si T est une distribution propre invariante sur \mathfrak{q} alors sa restriction $T|_{\mathfrak{q}^{reg}} = F$ est une fonction localement intégrable sur \mathcal{U} . Mais les questions suivantes restent ouvertes : la fonction F est-elle localement intégrable sur \mathfrak{q} ? La distribution T_F est-elle propre invariante sur \mathcal{U} ? sur \mathfrak{q} ?

1 Préliminaires

1.1 Notations

Si M est une variété différentiable, on note $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur M , $\mathcal{D}(M)$ le sous-espace de $C^\infty(M)$ des fonctions à support compact et $\mathcal{D}(M)'$ l'espace des distributions sur M , c'est-à-dire le dual de $\mathcal{D}(M)$.

Pour $N \subset M$ et f une fonction définie sur M , on notera $f|_N$ sa restriction à N .

Si Ω est un ensemble fini, alors $|\Omega|$ désigne son cardinal.

Le spectre d'une matrice X sera noté $Sp(X)$.

On notera \log la détermination principale du logarithme définie sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ par $\log(z) = \log|z| + i\text{Arg}(z)$ où l'argument $\text{Arg}(z)$ de z appartient à $] -\pi, \pi[$.

La fonction $Y(t)$ désignera la fonction d'Heaviside sur \mathbb{R} .

Soit \mathbf{G} un groupe algébrique linéaire défini sur \mathbb{R} . On note G l'ensemble de ses points réels et $G_{\mathbb{C}}$ l'ensemble de ses points complexes. Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . Pour $g \in G$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$, on notera $g \cdot X = \text{Ad}(g)X$ (resp. $\text{ad}(Y)X = [Y, X]$) l'action adjointe de G (resp. \mathfrak{g}) sur \mathfrak{g} .

Soit M un sous-groupe de G et $M_{\mathbb{C}}$ son complexifié dans $G_{\mathbb{C}}$. Si U une partie de \mathfrak{g} alors, on note $Z_M(U) = \{m \in M; m \cdot u = u \text{ pour tout } u \in U\}$ le centralisateur de U dans M et $N_M(U) = \{m \in M; m \cdot U \subset U\}$ son normalisateur. De même pour tout sous-espace vectoriel \mathfrak{v} de \mathfrak{g} , on note $\mathfrak{z}_{\mathfrak{v}}(U)$ le centralisateur de U dans \mathfrak{v} et $\mathfrak{n}_{\mathfrak{v}}(U)$ son normalisateur.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. On notera V^* son dual et $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié. L'algèbre symétrique $S[V]$ de V s'identifie d'une part à l'algèbre $\mathbb{R}[V^*]$ des fonctions polynomiales à coefficients réels sur V^* et d'autre part, à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants réels sur V . De même, on a $S[V_{\mathbb{C}}] = \mathbb{C}[V^*]$ et cette algèbre s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants complexes sur $V_{\mathbb{C}}$. Si $u \in S[V]$ (resp. $S[V_{\mathbb{C}}]$), on note $\partial(u)$ l'opérateur différentiel correspondant.

On note $S[V]^M$ (respectivement $S[V_{\mathbb{C}}]^M$) la sous algèbre de $S[V]$ (respectivement $S[V_{\mathbb{C}}]$) constituée des éléments invariants sous l'action d'un sous-groupe M de G .

On considère $G = GL(4, \mathbb{R})$ et son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ munis de l'involution

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix},$$

où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$.

Le groupe $H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right); A, B \in GL(2, \mathbb{R}) \right\}$ est alors le sous-groupe des points de G fixes sous l'action de σ dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = X\}$. On note $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = -X\}$ de telle sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$. On a

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right); A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \right\}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{q} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Z & 0 \end{array} \right); Y, Z \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \right\}.$$

L'espace \mathfrak{q} est stable sous l'action de H et plus précisément, pour $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in H$ et $\left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Z & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{q}$, on a $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Z & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & AYB^{-1} \\ \hline BZA^{-1} & 0 \end{array} \right)$.

On note \mathfrak{q}^{ss} l'ensemble des éléments semi-simples c'est-à-dire des matrices semi-simples, de \mathfrak{q} . L'algèbre de Lie \mathfrak{g} étant de rang 4, il existe des polynômes $d_4 \neq 0, \dots, d_{16}$ sur \mathfrak{g} tels que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'on ait $\det(t - \text{ad}(X)) = \sum_{j=4}^{16} d_j(X)t^j$. Un élément $X \in \mathfrak{g}$ semi-simple est dit régulier dans \mathfrak{g} si $d_4(X) \neq 0$ ce qui équivaut à dire que les valeurs propres de X sont deux à deux distinctes.

Définition 1.1.1. Soit l le plus petit entier tel que $d_{l/\mathfrak{q}} \neq 0$. Un élément X de \mathfrak{q} est \mathfrak{q} -régulier s'il est semi-simple et satisfait $d_l(X) \neq 0$. On note \mathfrak{q}^{reg} l'ensemble des éléments \mathfrak{q} -réguliers de \mathfrak{q} .

Les valeurs propres de la matrice $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{q}$ sont

$\pm\lambda_1$ et $\pm\lambda_2$. Ainsi, on a $l = 4$ et le résultat suivant est immédiat.

Lemme 1.1.1. *Soit $X \in \mathfrak{q}$. Alors X est \mathfrak{q} -régulier si et seulement si X est semi-simple et régulier dans \mathfrak{g} .*

On appelle sous-espace de Cartan $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$ un sous-espace abélien, formé d'éléments semi-simples et maximal pour cette propriété. On note $car(\mathfrak{q})$ l'ensemble des sous-espaces de Cartan de \mathfrak{q} .

Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan. On note $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ le système de racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et lorsque l'on choisit un ordre sur celui-ci, on note $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ le système de racines positives correspondant. Soit $W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ le groupe de Weyl de $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ et $W_H(\mathfrak{a}) = \{Ad(h)_{/\mathfrak{a}}; h \in N_H(\mathfrak{a})\} \simeq N_H(\mathfrak{a})/Z_H(\mathfrak{a})$ le groupe de Weyl de \mathfrak{a} dans H .

Pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, on note $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} = \{Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \forall X \in \mathfrak{a}, [X, Y] = \alpha(X)Y\}$, l'espace radiciel correspondant et $m_{\alpha} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ la multiplicité de α .

On rappelle les résultats classiques suivants :

Proposition 1.1.1. (paragraphe 1 de [15]) (a) Les énoncés suivants sont équivalents :

1. X est \mathfrak{q} -régulier.
2. $\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}(X)$ est un sous espace de Cartan de \mathfrak{q} .
3. Si \mathfrak{a} est un sous-espace de Cartan de \mathfrak{q} contenant X , alors X n'annule aucune racine de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$.

(b) Tout élément régulier appartient à un unique sous-espace de Cartan de \mathfrak{q} .

On note ω la forme bilinéaire symétrique sur \mathfrak{g} définie par $\omega(X, X') = \frac{1}{2}tr(XX')$ pour X et X' dans \mathfrak{g} . La restriction de ω à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ coïncide, à un facteur multiplicatif près, avec la forme de Killing. La forme ω est H -invariante et non dégénérée. Il est en de même de ses restrictions à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, à $\mathfrak{q} \times \mathfrak{q}$ et à $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ pour tout $\mathfrak{a} \in car(\mathfrak{q})$.

Soit $\mathfrak{a} \in car(\mathfrak{q})$. Ainsi, pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, il existe un unique élément $h_{\alpha} \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ tel que $\omega(h_{\alpha}, X) = \alpha(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{a}$. On définit la partie compacte $\mathfrak{a}_I = \left(\sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} \mathbb{R} h_{\alpha} \right) \cap \mathfrak{a}$ et la partie déployée $\mathfrak{a}_R = \left(\sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} \mathbb{R} h_{\alpha} \right) \cap \mathfrak{a}$ de \mathfrak{a} de telle sorte que l'on ait $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_R + \mathfrak{a}_I$. Une racine α est dite réelle (respectivement imaginaire) si $\alpha(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{R}$ (respectivement $\alpha(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{R}i$), ceci est équivalent à $h_{\alpha} \in \mathfrak{a}_R$ (respectivement $h_{\alpha} \in \mathfrak{a}_I$).

On note $\langle \mathfrak{a} \rangle$ un représentant de la classe de conjugaison de \mathfrak{a} sous l'action de H . L'ordre d'Hirai sur les classes modulo H des sous-espaces de Cartan est défini de la manière suivante : soient \mathfrak{a} et \mathfrak{b} deux sous-espaces de Cartan. On dit que $\langle \mathfrak{a} \rangle \leq \langle \mathfrak{b} \rangle$ si et seulement si il existe $h \in H$ tel que $(h \cdot \mathfrak{a})_R \subset \mathfrak{b}_R$. Lorsque cette inclusion est stricte, on dit alors que $\langle \mathfrak{a} \rangle < \langle \mathfrak{b} \rangle$.

1.2 Sous-espaces de Cartan

On définit les sous-espaces de Cartan $\mathfrak{a}_{\epsilon_1, \epsilon_2}$ pour ϵ_1 et $\epsilon_2 = \pm$, et \mathfrak{a}_2 de \mathfrak{q} de la manière suivante :

$$\mathfrak{a}_{\epsilon_1, \epsilon_2} = \left\{ X_{u_1, u_2}^{\epsilon_1, \epsilon_2} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & u_1 & 0 \\ \hline \epsilon_1 u_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 u_2 & 0 \end{array} \right); (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$\mathfrak{a}_2 = \left\{ X_{\tau, \theta} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \tau & -\theta \\ \hline \tau & -\theta & \tau \\ \theta & \tau & 0 \end{array} \right); (\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Les sous-espaces $\mathfrak{a}_{+, -}$ et $\mathfrak{a}_{-, +}$ sont conjugués par $K = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \hline & & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{array} \right).$

- Lemme 1.2.1.** 1. Soit $X = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{q}^{reg}$. Si λ est une valeur propre de X alors $\lambda \neq 0$ et $-\lambda$ est aussi une valeur propre de X . On a $Sp(YZ) = \{\lambda^2; \lambda \in Sp(X)\}$.
2. La famille $< \text{car}(\mathfrak{q}) > = \{\mathfrak{a}_{+, +}, \mathfrak{a}_{+, -}, \mathfrak{a}_{-, -}, \mathfrak{a}_2\}$ est une famille représentative des classes de conjugaison sous H des sous-espaces de Cartan de \mathfrak{q} .

Preuve : 1. Soient U et V dans \mathbb{C}^2 tels que $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre non nul de X pour la valeur propre λ . On a alors $YV = \lambda U$ et $ZU = \lambda V$. Si $\lambda \neq 0$ alors U et V sont non nuls. Par suite, le vecteur $\begin{pmatrix} U \\ -V \end{pmatrix}$ est un vecteur propre non nul de X pour la valeur propre $-\lambda$.

Comme X est régulier dans \mathfrak{q} , ses valeurs propres sont deux à deux distinctes. D'autre part, si 0 était une valeur propre de X alors, par ce qui précède, elle serait double ce qui est impossible puisque X est régulier. Ainsi, on a $Sp(X) = \{\pm\lambda_1, \pm\lambda_2\}$ où λ_1 et λ_2 sont deux nombres complexes non nuls tels que $\lambda_1 \neq \pm\lambda_2$. En particulier, les matrices X , Y et Z sont inversibles.

Pour $j = 1$ ou 2 , on fixe un vecteur propre non nul $\begin{pmatrix} U_j \\ V_j \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre λ_j . Les vecteurs U_1 et U_2 de \mathbb{C}^2 sont non nuls puisque la famille $\left\{ \begin{pmatrix} U_j \\ V_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_j \\ -V_j \end{pmatrix} \right\}_j$ est une base de \mathbb{C}^4 et ils vérifient $YZU_1 = \lambda_1^2 U_1$ et $YZU_2 = \lambda_2^2 U_2$. On obtient donc la première assertion.

2. Le spectre $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2\}$ de YZ est donné par les racines du polynôme $x^2 - \text{tr}(YZ)x + \det(YZ) \in \mathbb{R}[x]$. Ainsi, soit λ_1^2 et λ_2^2 sont réels, soit $\lambda_1^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = \pm \overline{\lambda_1}$.

Si λ_1^2 et λ_2^2 sont réels, il existe une matrice $P \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que $PYZP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$. Notons $\text{sgn}(x)$ le signe de $x \in \mathbb{R}$. On peut donc écrire $PYZP^{-1} = DD'$ où $D = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} \text{sgn}(\lambda_1^2)|\lambda_1| & 0 \\ 0 & \text{sgn}(\lambda_2^2)|\lambda_2| \end{pmatrix}$. On obtient alors $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & D'PZ^{-1} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D' & 0 \end{pmatrix}$ et dans ce cas X est H -conjugué à un élément de $\mathfrak{a}_{+,+}$, $\mathfrak{a}_{+,-}$ ou $\mathfrak{a}_{-,-}$.

Si $\lambda_2 = \pm \overline{\lambda_1}$, on écrit $\lambda_1 = \tau + i\theta$ avec $(\theta, \tau) \in \mathbb{R}^2$. Il existe alors une matrice $P \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que $PYZP^{-1} = M^2$ avec $M = \begin{pmatrix} \tau & -\theta \\ \theta & \tau \end{pmatrix}$. On obtient donc $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & MPZ^{-1} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{pmatrix}$ et dans ce cas X est conjugué à un élément de \mathfrak{a}_2 .

Soit $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q})$ et $X \in \mathfrak{a}^{\text{reg}}$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}(X)$. Par ce qui précède, il existe $h \in H$ tel que $h.X$ appartienne à $\mathfrak{a}_{+,+}$, $\mathfrak{a}_{+,-}$, $\mathfrak{a}_{-,-}$ ou \mathfrak{a}_2 . Comme $\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}(h.X) = h.\mathfrak{a}$, on obtient la deuxième assertion. ■

Pour $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q})$, on note α_1 et α_2 les deux racines de multiplicité un dont on fixe les valeurs sur $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$ de la manière suivante :

	$X_{u_1, u_2}^{++} \in \mathfrak{a}_{++}$	$X_{u_1, u_2}^{+-} \in \mathfrak{a}_{+-}$	$X_{u_1, u_2}^{--} \in \mathfrak{a}_{--}$	$X_{\tau, \theta} \in \mathfrak{a}_2$
$\alpha_1(X)$	$2u_1$	$2u_1$	$2iu_1$	$2(\tau + i\theta)$
$\alpha_2(X)$	$2u_2$	$2iu_2$	$2iu_2$	$2(\tau - i\theta)$

Dans tout cet article, on fixe le système de racines positives en posant $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$ où les deux racines $\beta_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$ et $\beta_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ sont de multiplicité deux.

Ainsi, suivant l'ordre d'Hirai, nous avons

$$\langle \mathfrak{a}_{-,-} \rangle < \langle \mathfrak{a}_{+,-} \rangle < \langle \mathfrak{a}_{+,+} \rangle \quad \text{et} \quad \langle \mathfrak{a}_{-,-} \rangle < \langle \mathfrak{a}_2 \rangle < \langle \mathfrak{a}_{+,+} \rangle.$$

avec les relations suivantes $\mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_{+,-} = \mathbb{R}h_{\alpha_1} = \text{Ker } \alpha_2$, $\mathfrak{a}_{+,-} \cap \mathfrak{a}_{-,-} = \mathbb{R}h_{\alpha_2} = \text{Ker } \alpha_1$, $\mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_2 = \mathbb{R}h_{\beta_2} = \text{Ker } \beta_1$ et $\mathfrak{a}_{-,-} \cap h_0 \cdot \mathfrak{a}_2 = \mathbb{R}h_{\beta_1} =$

$$\text{Ker } \beta_2, \text{ où } h_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \hline & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & -1 \end{array} \right).$$

On définit l'involution H -équivariante ϖ de \mathfrak{q} par $\varpi\left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Z & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline -Z & 0 \end{array}\right)$. Cet automorphisme vérifie les propriétés suivantes :

1. pour $(X, X') \in \mathfrak{q}^2$, on a $[\varpi(X), \varpi(X')] = -[X, X']$.
2. pour $(X, X') \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{q}$, on a $[X, \varpi(X')] = \varpi([X, X'])$, ceci provenant de la H -équivariance de ϖ .
3. $\varpi(\mathfrak{a}_{+,+}) = \mathfrak{a}_{-,-}$, $\varpi(\mathfrak{a}_{+,-}) = \mathfrak{a}_{-,+}$ et $\varpi(\mathfrak{a}_2) = h_0 \cdot \mathfrak{a}_2$, et plus précisément, pour $X_{\tau,\theta} \in \mathfrak{a}_2$, on a $\varpi(X_{\tau,\theta}) = h_0 \cdot X_{\theta,\tau}$.

En particulier, l'involution ϖ renverse l'ordre d'Hirai sur $\text{car}(\mathfrak{q})$.

Précisons maintenant les groupes $W_H(\mathfrak{a})$ pour $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q})$. On pose

$$\kappa = \text{Ad}K = \text{Ad} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \hline & & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \varrho = \text{Ad} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & & 0 \\ \hline & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Sur $\mathfrak{a}_{+,+}$ et $\mathfrak{a}_{-,-}$, l'élément κ échange les racines α_1 et α_2 et l'élément ϱ échange les racines β_1 et β_2 et on obtient alors :

- Lemme 1.2.2.** 1. $W_H(\mathfrak{a}_{+,+}) = W_H(\mathfrak{a}_{-,-}) = \{\pm I_4, \pm \kappa, \pm \varrho, \pm \kappa \varrho\}$
 2. $W_H(\mathfrak{a}_{+,-}) = \{\pm I_4, \pm \varrho\}$
 3. $W_H(\mathfrak{a}_2) = \{\pm I_4, \pm \kappa\}$

Preuve : Soit $h = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in N_H(\mathfrak{a}_{+,+})$. Pour tout $X_{u_1, u_2}^{++} \in \mathfrak{a}_{+,+}$ il existe $X_{v_1, v_2}^{++} \in \mathfrak{a}_{+,+}$ tel que $h \cdot X_{u_1, u_2}^{++} = X_{v_1, v_2}^{++}$. Ainsi, on a $A \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} B^{-1} = B \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}$. Par suite, pour $M = A$ ou B , on a $M \begin{pmatrix} u_1^2 & 0 \\ 0 & u_2^2 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} v_1^2 & 0 \\ 0 & v_2^2 \end{pmatrix}$ et donc, M est diagonale ou KM est diagonale. La première relation implique que, soit

A et B sont diagonales et $A^2 = B^2$, soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B$ sont diagonales et ont même carré. Maintenant, on remarque que $Z_H(\mathfrak{a}_{+,+}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & & \\ 0 & b & & \\ \hline & & a & 0 \\ & & 0 & b \end{array} \right) \in GL(4, \mathbb{R}) \right\}$, ce qui donne aisément la première assertion. Les autres assertions se prouvent de même. \blacksquare

1.3 Orbites semi-simples

Nous allons décrire maintenant les orbites semi-simples de \mathfrak{q} sous l'action de H .

La paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est de rang 2. Par suite, une base de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$ est donnée par les polynômes Q et S définis, pour $X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Z & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{q}$, par

$$Q(X) = \frac{1}{2} \text{tr}(X^2) = \text{tr}(YZ) = \omega(X, X) \text{ et } S(X) = \det(X) = \det(YZ).$$

Pour $X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Z & 0 \end{array} \right)$, les racines du polynôme $t^2 - Q(X)t + S(X)$ forment le spectre de YZ . On pose

$$S_0 = Q^2 - 4S \text{ et } \delta = i^{Y(-S_0)} \sqrt{|S_0|}$$

(où Y est la fonction d'Heaviside) de telle sorte que $\delta^2 = S_0$. On définit les fonctions H -invariantes u et v sur \mathfrak{q} par

$$u = \frac{Q + \delta}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{Q - \delta}{2},$$

de telle sorte que, pour $X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Z & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{q}^{ss}$, alors $Sp(YZ) = \{u(X), v(X)\}$.

Lemme 1.3.1. 1. *L'application*

$$\begin{cases} \{H\text{-Orbites semi-simples de } \mathfrak{q}\} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{O} = H \cdot X & \longmapsto (Q(X), S(X)) \end{cases}$$

est bijective.

2. *Nous notons \sim la relation d'équivalence sur \mathbb{C}^2 qui identifie les couples (x, y) et (y, x) . Alors l'application*

$$\begin{cases} \{H\text{-Orbites semi-simples de } \mathfrak{q}\} & \longrightarrow \mathbb{C}^2 / \sim \\ \mathcal{O} = H \cdot X & \longmapsto (u(X), v(X)) \end{cases}$$

est injective et d'image $(\mathbb{R}^2 \cup \{(\lambda, \bar{\lambda}); \lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}\}) / \sim$.

Preuve : La description de $\mathfrak{a}_{+,+}$, $\mathfrak{a}_{+,-}$, $\mathfrak{a}_{-,-}$ et \mathfrak{a}_2 permet d'obtenir l'image des deux applications considérées. Par ailleurs, toute H -orbite semi-simple rencontre $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$. L'étude de $W_H(\mathfrak{a})$ pour $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$ donnée dans le lemme 1.2.2 permet d'établir l'injectivité de ces applications. ■

Remarque 1.3.1. 1. Soit $X \in \mathfrak{q}^{ss}$. Alors, les fonctions u et v prennent des valeurs réelles sur $\mathfrak{a}_{\epsilon_1 \epsilon_2}$ pour $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm$ et on a

- (a) $H \cdot X \cap \mathfrak{a}_{+,+} \neq \emptyset$ si et seulement si $u(X) \geq 0$ et $v(X) \geq 0$,
- (b) $H \cdot X \cap \mathfrak{a}_{+,-} \neq \emptyset$ si et seulement si $u(X)v(X) \leq 0$,
- (c) $H \cdot X \cap \mathfrak{a}_{-,-} \neq \emptyset$ si et seulement si $u(X) \leq 0$ et $v(X) \leq 0$,
- (d) $H \cdot X \cap \mathfrak{a}_2 \neq \emptyset$ si et seulement si $u(X)$ et $v(X)$ sont dans \mathbb{C} et $\overline{u(X)} = v(X)$.

- 2. Soit $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q})$ et $X \in \mathfrak{a}$. On a les relations suivantes entre les racines de $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, les polynômes Q, S et S_0 et les fonctions u et v :

$$Q(X) = \frac{\alpha_1(X)^2 + \alpha_2(X)^2}{4} = u(X) + v(X),$$

$$S(X) = \frac{\alpha_1(X)^2 \alpha_2(X)^2}{16} = u(X)v(X),$$

$$S_0(X) = \beta_1(X)^2 \beta_2(X)^2 = (u(X) - v(X))^2.$$

$$\delta(X) = \begin{cases} |\beta_1(X)\beta_2(X)| & \text{si } \mathfrak{a} \text{ est } H\text{-conjugué à } \mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_{+,-} \text{ ou } \mathfrak{a}_{-,-} \\ i|\beta_1(X)\beta_2(X)| & \text{si } \mathfrak{a} \text{ est } H\text{-conjugué à } \mathfrak{a}_2 \end{cases}$$

$$3. \mathfrak{q}^{reg} = \{X \in \mathfrak{q}, S(X)S_0(X) \neq 0\}.$$

1.4 Points semi-réguliers

Les distributions propres invariantes et les intégrales orbitales sont des fonctions H -invariantes de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathfrak{q}^{reg} . Pour étudier ces objets au voisinage des points de $\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{reg}$, nous nous inspirons de la méthode de descente d'Harish-Chandra qui consiste à ramener cette étude à celle d'objets de même type définis sur des espaces symétriques plus petits construits à partir des centralisateurs des points semi-réguliers.

On rappelle qu'un élément semi-régulier est un élément de \mathfrak{q}^{ss} qui se trouve dans l'intersection d'exactly deux sous-espaces de Cartan. De façon équivalente c'est un élément d'un sous-espace de Cartan qui annule exactement une racine positive.

Ainsi, tout point semi-régulier est conjugué par H à un élément de $\mathfrak{a}_{+,+} \cap$

$$\mathfrak{a}_{+,-}, \mathfrak{a}_{+,-} \cap \mathfrak{a}_{-,-}, \mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_2 \text{ ou } \mathfrak{a}_{-,-} \cap h_0 \cdot \mathfrak{a}_2 \text{ avec } h_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \hline & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Pour $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{g})$, on rappelle que $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}, \beta_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\}$ où α_1 et α_2 sont fortement orthogonales et de multiplicité 1 et β_1, β_2 sont de multiplicité 2, orthogonales mais non fortement orthogonales. Ces différences entre racines de multiplicité 1 et racines de multiplicité 2 interviennent dans l'étude des centralisateurs des points semi-réguliers et seront essentielles lors de l'étude des distributions propres invariants.

1.4.1 Points semi-réguliers annulés par une racine de multiplicité un

$$\text{Soit } H_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \right) = \frac{1}{2}h_{\alpha_1} \text{ et } H_2 = \kappa(H_1) = \frac{1}{2}h_{\alpha_2} \text{ les}$$

coracines respectivement de α_1 et α_2 sur $\mathfrak{a}_{+,+}$. Ainsi, on a $\mathbb{R}H_1 = \mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_{+,-}$, $\mathbb{R}\varpi(H_1) = \mathfrak{a}_{-,-} \cap \mathfrak{a}_{-,+}$, $\mathbb{R}\kappa(H_1) = \mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_{-,+}$, et $\mathbb{R}\varpi \circ \kappa(H_1) = \mathfrak{a}_{-,-} \cap \mathfrak{a}_{+,-}$.

$$\text{Soit } \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(H_1) = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & x & 0 \\ 0 & b & 0 & y \\ \hline x & 0 & a & 0 \\ 0 & z & 0 & c \end{array} \right) ; a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathfrak{z}_2 =$$

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(H_2) = \kappa(\mathfrak{z}_1).$$

Les algèbres \mathfrak{z}_1 et \mathfrak{z}_2 sont réductives et σ -stables. On note \mathfrak{c}_j le centre de \mathfrak{z}_j . On a alors $\mathfrak{c}_j = \mathfrak{c}_j \cap \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}H_j$ et $\mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{c}_2 \cap \mathfrak{h} =$

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right) ; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

on pose $A_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ de telle sorte que $\mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{h} = \mathbb{R}A_1 \oplus \mathbb{R}\kappa(A_1)$

et on note $\mathfrak{m}_1 = \mathbb{R}A_1 \oplus [\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1]$ et $\mathfrak{m}_2 = \kappa(\mathfrak{m}_1)$.

On définit alors l'espace \mathfrak{m} par

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{h} \oplus [\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1] \oplus [\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_2] = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2.$$

Lemme 1.4.1. 1. Les algèbres \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 sont réductives, σ -stables et $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = \{0\}$,

2. \mathfrak{m} est une sous-algèbre de Lie σ -stable de \mathfrak{g} de dimension 8. La paire symétrique $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})$ est de rang 2 et c'est le produit des deux paires symétriques de rang un $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{h})$ et $(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{h})$, chacune isomorphe à $(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}))$, que l'on peut permuter à l'aide de κ .

Preuve : Les algèbres \mathfrak{z}_1 et \mathfrak{z}_2 sont réductives et σ -stables et les éléments A_1 et A_2 sont centraux dans \mathfrak{m} donc \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 sont réductives et σ -stables. Les racines de $\mathfrak{a}_{+,+}$ étant réelles, on a $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_{++}) \oplus (\mathfrak{g}_{\alpha_2}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_2}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g})$ et $[\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1] \subset (\mathfrak{g}_{\alpha_2}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_2}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g})$. Les racines α_1 et α_2 sont fortement orthogonales et les éléments A_1 et $\kappa(A_1)$ sont centraux dans \mathfrak{m} , ainsi on obtient $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = \{0\}$.

Comme $[\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1] = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & y \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & c \end{array} \right), y, z, c \in \mathbb{R} \right\}$, la deuxième as-

sertion est immédiate. ■

Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on note $diag(a, b, c, d) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array} \right)$.

On rappelle que $\kappa = Ad(K)$ avec $K = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$

Lemme 1.4.2. *Soit $N = N_H(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$.*

1. *On a $N = N^0 \cup KN^0$ avec $N^0 = \{diag(a, b, c, d); a, b, c, d \in \mathbb{R}^*\}$.*
2. *Soit $h \in H$ et $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ tels que $S_0(X) \neq 0$ et $h \cdot X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, alors $h \in N$. (Le polynôme $S_0 \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$ est défini dans le paragraphe 1.3).*
3. *Si $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$ alors $Z_H(X) = \{diag(\alpha, \beta, \alpha, \beta); \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*\}$.*

Preuve : Pour $D \in GL(4, \mathbb{R})$ une matrice diagonale, on a immédiatement $D \in N$ et $KD \in N$.

Soient $h = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in H$ et $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ tels que $h \cdot X = X' \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$.

On écrit $X = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ \hline z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right)$ et $X' = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & x' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y' \\ \hline z' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t' & 0 & 0 \end{array} \right)$. Ainsi, on a $A \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} z' & 0 \\ 0 & t' \end{pmatrix}$, ce qui donne $A \begin{pmatrix} xz & 0 \\ 0 & yt \end{pmatrix} A^{-1} = B \begin{pmatrix} xz & 0 \\ 0 & yt \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} x'z' & 0 \\ 0 & y't' \end{pmatrix}$.

Supposons $S_0(X) \neq 0$. On a alors $xz \neq yt$, et par suite $x'z' \neq y't'$. Si $xz = x'z'$ et $yt = y't'$ alors A et B sont diagonales, donc h est diagonale. Si $xz = y't'$ et $yt = x'z'$, alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B$ sont diagonales, donc Kh est diagonale. On obtient ainsi les assertions 1. et 2.

Si $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$ et $h.X = X$ alors $S_0(X) \neq 0$ et $h \in N^0$ par ce qui précède. On en déduit facilement l'assertion 3. ■

Lemme 1.4.3. *La famille $\langle \text{car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) \rangle = \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_{+,-}, \mathfrak{a}_{-,-}\}$ est une famille représentative des classes de conjugaison sous N des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$.*

Preuve : Par définition de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, les sous-espaces $\mathfrak{a}_{+,+}$, $\mathfrak{a}_{+,-}$ et $\mathfrak{a}_{-,-}$ sont des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$. Si \mathfrak{a} est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, c'est un sous-espace de Cartan de \mathfrak{q} et donc, il existe $h \in H$ tel que $h \cdot \mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$. Maintenant, par le point 2. de la remarque 1.3.1, le polynôme $S_0 \in \mathbb{C}[q]^H$ ne prend que des valeurs négatives sur \mathfrak{a}_2 . Un élément

$$\text{de } \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \text{ s'écrit } X = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & x & 0 \\ & & 0 & y \\ \hline z & 0 & & \\ 0 & t & & 0 \end{array} \right) \text{ et par suite } S_0(X) = (xz - yt)^2 \geq$$

0. On obtient donc $h \cdot \mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_{+,-}, \mathfrak{a}_{-,-}\}$. L'assertion 2. du lemme 1.4.2 donne alors $h \in N$ ce qui prouve le lemme. ■

1.4.2 Éléments semi-réguliers annulés par une racine de multiplicité deux

$$\text{On note } H_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & 0 \end{array} \right) \text{ la coracine de } \beta_2 \text{ dans } \mathfrak{a}_{+,+}. \text{ On a}$$

alors $\mathbb{R}H_3 = \mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_2$ et $\mathbb{R}\varpi(H_3) = \mathfrak{a}_{-,-} \cap \varpi(\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_{-,-} \cap h_0 \cdot \mathfrak{a}_2$. Ainsi, tout élément semi-régulier annulé par une racine de multiplicité 2 est H -conjugué à un élément de $\mathbb{R}H_3$ ou de $\mathbb{R}\varpi(H_3)$.

On pose $\mathfrak{z}_3 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(H_3) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right); A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \right\}$ et $\mathfrak{z}_4 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\varpi(H_3)) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right); A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \right\}$. La paire symétrique $(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{h})$ est donc isomorphe à $(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \text{diag}(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))) \simeq \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ par l'application $\left(\begin{array}{c|c} A & Y \\ \hline Y & A \end{array} \right) \rightarrow (A+Y, A-Y)$ et la paire symétrique $(\mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_4 \cap \mathfrak{h})$ est isomorphe $(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}), \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}))$ par l'application $\left(\begin{array}{c|c} A & Y \\ \hline -Y & A \end{array} \right) \rightarrow A + \imath Y$.

Comme $\mathfrak{q} = \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{z}_4 \cap \mathfrak{q}$, on ne peut pas effectuer de réduction à un espace plus petit comme au paragraphe précédent. Bien que les espaces vectoriels $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{z}_4 \cap \mathfrak{q}$ ne soient pas conjugués sous H , on remarque que $\varpi(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}) = \mathfrak{z}_4 \cap \mathfrak{q}$. Ainsi l'étude sur $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ suffira pour comprendre les

phénomènes au voisinage de tous les éléments semi-réguliers annulés par une racine de multiplicité deux.

On note $\tilde{K} = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -I_2 \end{array} \right)$ et $\tilde{\kappa} = \text{Ad}(\tilde{K})$ de telle sorte que $\tilde{\kappa}|_{\mathfrak{q}} = -\text{Id}|_{\mathfrak{q}}$.

Lemme 1.4.4. *Soit $N_3 = N_H(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$.*

1. *On a $N_3 = N_3^0 \cup \tilde{K}N_3^0$ avec $N_3^0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right); A \in GL(2, \mathbb{R}) \right\}$.*
2. *La famille $\langle \text{car}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}) \rangle = \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_2\}$ est une famille représentative des classes de conjugaison sous N_3 des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$.*

Preuve : Si $h = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$ alors on a immédiatement $h \in N_3$ et $\tilde{K}h \in N_3$.

Si $h = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in N_3$ alors pour tout $Y \in GL(2, \mathbb{R})$, on a $AYB^{-1} = BYA^{-1}$ et donc la matrice $P = B^{-1}A$ vérifie $PYP = Y$ pour tout $Y \in GL(2, \mathbb{R})$. En appliquant ceci à $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis à $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on obtient $P = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}$ avec $\epsilon_j = \pm 1$. Comme $A = BP$, la relation $AYB^{-1} = BYA^{-1}$ pour tout $Y \in GL(2, \mathbb{R})$ donne l'assertion 1.

Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$. Il existe $h \in H$ tel que $h \cdot \mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$. Comme le polynôme S prend des valeurs positives sur $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ et des valeurs négatives sur $\mathfrak{a}_{+,-}$, on a $h \cdot \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}_{+,-}$. Maintenant, si $h \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{-,-}$, par un raisonnement analogue à ce qui précède, il existerait $P \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que pour toute matrice diagonale D l'on ait $PDP = -D$ ce qui n'est pas possible. Ainsi on a $h \cdot \mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_2\}$. Par suite \mathfrak{a} et $h \cdot \mathfrak{a}$ sont deux sous-espaces de Cartan H -conjugués de $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$, il existe donc $h_1 \in N_3$ tel que $h_1 \cdot \mathfrak{a} = h \cdot \mathfrak{a}$. On a alors $h_1 h^{-1} \in N_H(h \cdot \mathfrak{a})$ et donc par le lemme 1.2.2 on obtient $h \in N_3$. ■

2 Généralisation de certains résultats sur les intégrales orbitales en rang un

Nous rappelons tout d'abord certains résultats d'Harish-Chandra concernant l'intégration sur les fibres dont on peut trouver la preuve dans le lemme 1 du chapitre 2 première partie de [21] ou dans le chapitre 3 page 192 de [4].

Proposition 2.0.1. *Soient M et N deux variétés \mathcal{C}^∞ de dimension m et n . Soit $\psi : M \rightarrow N$ une submersion de classe \mathcal{C}^∞ surjective de M sur N . Soient ω_M (resp. ω_N) une m -forme (resp. n -forme) de classe \mathcal{C}^∞ sur M (resp. N) non nulle en tout point. On note μ_M et μ_N les mesures de Radon positives respectivement sur M et N associées. Alors, on a :*

1. Pour tout $f \in \mathcal{D}(M)$, il existe une unique fonction $\psi_*(f) \in \mathcal{D}(N)$ telle que

$$\int_M f \cdot F \circ \psi d\mu_M = \int_N \psi_*(f) F d\mu_N \quad , \forall F \in \mathcal{D}(N). \quad (1)$$

La fonction $\psi_*(f)$ est définie comme suit : pour tout $y \in N$, il existe une unique mesure de radon positive μ_y telle que $\psi_*(f)(y) = \int_{\psi^{-1}(y)} f d\mu_y$. Ceci est appelé l'intégration sur les fibres.

2. L'application ψ_* est une application linéaire continue surjective de $\mathcal{D}(M)$ dans $\mathcal{D}(N)$.
3. La relation (1) est vraie si F est localement intégrable pour μ_N .
4. L'application ψ_* se prolonge aux fonctions μ_M -intégrables f et dans ce cas $\psi_*(f)$ est définie presque partout et μ_N -intégrable. La relation (1) est encore vraie.

De plus si f est à support compact, alors $\psi_*(f)$ est à support compact et de \mathcal{C}^∞ sur tout ouvert Ω tel que f est \mathcal{C}^∞ sur $\psi^{-1}(\Omega)$.

2.1 Cas d'une forme quadratique

Soient p et q deux entiers de \mathbb{N}^* et $n = p + q$. Soit \mathcal{Q} la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^n par

$$\mathcal{Q}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^p y_i^2 - \sum_{i=1}^q y_{i+p}^2.$$

L'application \mathcal{Q} est submersive et surjective de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ dans \mathbb{R} et la proposition précédente permet de définir l'application $\mathcal{Q}_* : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Cette application étudiée par A. Tengstrand dans [18] est appelée fonction moyenne par J. Faraut dans [5] et notée $M_{\mathcal{Q}}$. Dans toute la suite, nous noterons $\mathcal{Q}_* = M_{\mathcal{Q}}$.

D'après le point 4. de la proposition 2.0.1, comme 0 est une valeur critique de \mathcal{Q} , l'application $M_{\mathcal{Q}}$ se prolonge en une application continue, notée encore $M_{\mathcal{Q}}$, de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*) \cap L^1(\mathbb{R})$ et pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la fonction $M_{\mathcal{Q}}(f)$ satisfait toujours la relation (1) qui s'écrit,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F \circ \mathcal{Q}(y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} F(t) M_{\mathcal{Q}} f(t) dt \quad \text{pour tout } F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (2)$$

Nous rappelons succinctement les propriétés essentielles de $M_{\mathcal{Q}}(f)$. On pourra se référer à l'appendice de [5] ou au chapitre 4 pages 204 et 205 de [4] pour les détails.

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Le comportement de $M_{\mathcal{Q}}(f)(t)$ au voisinage de $t = 0$ se décrit à l'aide d'une fonction η définie sur \mathbb{R}^* , qui dépend de la signature

(p, q) de \mathcal{Q} . Cette fonction, appelée "fonction singularité" relative à \mathcal{Q} , est définie de la manière suivante (la fonction d'Heaviside est notée Y) :

Si p est impair et q est pair, $\eta(t) = Y(t)t^{\frac{n}{2}-1}$

Si p est pair et q est impair, $\eta(t) = Y(-t)(-t)^{\frac{n}{2}-1}$

Si p et q sont pairs, $\eta(t) = \frac{1}{2}\text{sgn}(t)t^{\frac{n}{2}-1}$

Si p et q sont impairs, $\eta(t) = t^{\frac{n}{2}-1} \log |t|$.

Suivant ([4] chapitre 4 pages 204 et 205), on introduit l'espace

$$\mathcal{H}_\eta = \{t \in \mathbb{R}^* \mapsto \phi_0(t) + \eta(t)\phi_1(t); \phi_0, \phi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}.$$

Grâce au lemme de Borel, une fonction φ appartient à \mathcal{H}_η si et seulement si φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* , à support compact et s'il existe une suite de nombres $(B_k(\varphi))_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $m < N + (n/2)$, la fonction $\varphi(t) - \eta(t) \sum_{k=0}^N t^k B_k(\varphi)$ soit de classe \mathcal{C}^m sur \mathbb{R} .

Pour $a > 0$, on note $\mathcal{H}_{\eta,a} = \{\varphi \in \mathcal{H}_\eta; \text{support}(\varphi) \subset [-a, a]\}$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. On considère, pour $N \in \mathbb{N}$ et $m < N + (n/2)$ la semi-norme

$$\|\varphi\|_{N,m} = \sup_t \left| \left(\frac{d}{dt} \right)^m [\varphi(t) - \chi(t)\eta(t) \sum_{k=0}^N B_k(\varphi)t^k] \right|.$$

Les semi-normes $\|\varphi\|_{N,m}$, pour $m < N + (n/2)$, et $|B_k(\varphi)|$ pour $k \in \mathbb{N}$ munissent $\mathcal{H}_{\eta,a}$ d'une topologie d'espace de Fréchet et \mathcal{H}_η est muni de la topologie limite inductive.

Théorème 2.1.1. ([4], paragraphe 4, théorème page 205) *L'application $M_{\mathcal{Q}}$ est une surjection continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans \mathcal{H}_η .*

Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Pour $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, on note f_x la fonction définie sur \mathbb{R}^{n_2} par $f_x(y) = f(x, y)$ et pour $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, on note f^y la fonction définie sur \mathbb{R}^{n_1} par $f^y(x) = f(x, y)$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Ainsi pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, il existe deux fonctions ϕ_0 et ϕ_1 définies sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, telles que pour $x \in \mathbb{R}^m$, on ait $(\phi_0)_x$ et $(\phi_1)_x$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et

$$M_{\mathcal{Q}}f_x(t) = \phi_0(x, t) + \eta(t)\phi_1(x, t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

Le but de ce paragraphe est de montrer que ϕ_0 et ϕ_1 sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. Pour cela, nous reprenons les arguments développés dans le paragraphe 4 de [4] pour étudier la régularité en x des fonctions $(\phi_0)_x$ et $(\phi_1)_x$.

On introduit la submersion surjective G de $\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ définie par $G(x, y) = (x, \mathcal{Q}(y))$.

Lemme 2.1.1. 1. *L'application G_* se prolonge aux fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$. Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ et $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*$, on a $G_*(f)(x, t) = M_{\mathcal{Q}}f_x(t)$ et la fonction $G_*(f)$ est à support compact.*

2. Pour i_1, i_2, \dots, i_m dans \mathbb{N} , $x \in \mathbb{R}^m$ et $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_m}}{\partial x_m^{i_m}} M_Q f_x(t) = M_Q \left(\left(\frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_m}}{\partial x_m^{i_m}} f \right)_x \right) (t).$$

En particulier, la fonction $(x, t) \mapsto M_Q f_x(t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*$.

Preuve : La première assertion découle de la définition et des propriétés de M_Q rappelées au début de ce paragraphe.

Pour prouver le deuxième point, il suffit de montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a $\frac{\partial}{\partial x_i} M_Q f_x = M_Q \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x \right)$. Soit e_i le i ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m et $x \in \mathbb{R}^m$. On introduit la suite de fonctions $f_k = k(f_{x+\frac{1}{k}e_i} - f_x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Les supports des fonctions f_k et $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x$ sont inclus dans un même compact à savoir $\text{supp}(f) + [0, 1]e_i$. D'autre part, pour j_1, j_2, \dots, j_n dans \mathbb{N} , l'inégalité de Taylor donne

$$\left\| \frac{\partial^{j_1}}{\partial y_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_n}}{\partial y_n^{j_n}} f_k - \frac{\partial^{j_1}}{\partial y_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_n}}{\partial y_n^{j_n}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x \right) \right\|_\infty \leq \frac{1}{2k} \left\| \frac{\partial^{j_1}}{\partial y_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_n}}{\partial y_n^{j_n}} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f \right\|_\infty.$$

Ainsi, la suite de fonctions $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x$ pour la topologie usuelle de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. La continuité de l'application M_Q (théorème 2.1.1) donne alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M_Q f_k = M_Q \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right)_x \right).$$

Par ailleurs pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a $M_Q f_k(t) = k(M_Q f_{x+\frac{1}{k}e_i}(t) - M_Q f_x(t))$, et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_Q f_k(t) = \frac{\partial}{\partial x_i} M_Q f_x(t)$ ce qui donne le résultat voulu. ■

Le comportement de la fonction $(x, t) \mapsto M_Q f_x(t)$ au voisinage de $t = 0$ se déduit du comportement asymptotique en $+\infty$ de sa transformée de Fourier partielle $\mathcal{F}(M_Q f_x)$ en t dont la relation (2) donne l'expression suivante :

$$\mathcal{F}(M_Q f_x)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\lambda t} M_Q f_x(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\lambda \mathcal{Q}(y)} f_x(y) dy.$$

Lemme 2.1.2. Soit f dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$. Pour tout N dans \mathbb{N} , il existe une fonction $\rho_N(x, \lambda)$ définie sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*$ et une constante strictement positive C_N indépendante de x et λ telles que pour tout x dans \mathbb{R}^m et λ dans \mathbb{R}^* , on ait $|\rho_N(x, \lambda)| \leq \frac{C_N}{|\lambda|^{N+1}}$ et

$$\mathcal{F}(M_Q f_x)(\lambda) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)\text{sgn}(\lambda)}}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}}} \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{8i\pi\lambda} \right)^k (\partial \mathcal{Q})^k f_x(0) + \rho_N(x, \lambda) \right).$$

Preuve : Grâce au lemme page 203 de [4] on a :

$$\mathcal{F}(M_Q f_x)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\lambda Q(y)} f_x(y) dy = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)\text{sgn}(\lambda)}}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f_x)(\xi) e^{\frac{i\pi Q(\xi)}{2\lambda}} d\xi.$$

Le développement de Taylor de la fonction $t \mapsto e^{it}$ donne, pour tout $(\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$, la relation

$$\mathcal{F}(f_x)(\xi) e^{\frac{i\pi Q(\xi)}{2\lambda}} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{8i\pi\lambda} \right)^k (-4\pi^2 Q(\xi))^k \mathcal{F}(f_x)(\xi) + R_N(\xi, \lambda) \mathcal{F}(f_x)(\xi),$$

$$\text{avec } |R_N(\xi, \lambda)| \leq \frac{|\pi Q(\xi)|^{N+1}}{|2\lambda|^{N+1}(N+1)!}.$$

Comme $\int_{\mathbb{R}^n} (-4\pi^2 Q(\xi))^k \mathcal{F}(f_x)(\xi) d\xi = (\partial Q)^k f_x(0)$, on obtient l'expression voulue en prenant $\rho_N(x, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} R_N(\xi, \lambda) \mathcal{F}(f_x)(\xi) d\xi$, pour $x \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Pour conclure, il suffit de majorer $\int_{\mathbb{R}^n} |Q(\xi)|^{N+1} |\mathcal{F}(f_x)(\xi)| d\xi$ indépendamment de x . Soient $R, T \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\text{supp}(f) \subset \overline{B(0, R)} \times [-T; T]^n$. Soit χ une fonction positive à support compact et égale à 1 sur $[-T; T]^n$. Soit P_N le polynôme défini par $P_N(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{N+1} (1 + \xi_1^2) \dots (1 + \xi_n^2)$ de telle sorte que $P_N(\xi) \mathcal{F}(f_x)(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{(2i\pi)^n} \partial(P_N) f_x\right)(\xi)$ où $\frac{1}{(2i\pi)^n} \partial(P_N) = P_N\left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$. Comme, pour tout ξ dans \mathbb{R}^n et pour tout x dans \mathbb{R}^m , on a

$$\left| \mathcal{F}\left(\frac{1}{(2i\pi)^n} \partial(P_N) f_x\right)(\xi) \right| \leq \left\| \frac{1}{(2i\pi)^n} \partial(P_N) f \right\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi = A_N,$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Q(\xi)|^{N+1} |\mathcal{F}(f_x)(\xi)| d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P_N(\xi) |\mathcal{F}(f_x)(\xi)|}{(1 + \xi_1^2) \dots (1 + \xi_n^2)} d\xi \leq A_N \pi^n.$$

Cette majoration achève la preuve. ■

Nous rappelons la généralisation suivante du théorème de Borel.

Lemme 2.1.3. ([11] Theorem 1.2.6) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^k}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ dont les supports sont inclus dans un même compact. Alors il existe ϕ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k)$ telle que :

$$\frac{\partial^\alpha \phi}{\partial y^\alpha}(x, 0) = \phi_\alpha(x), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^k, x \in \mathbb{R}^m.$$

Preuve : La preuve est donnée pour $k = 1$ dans le théorème 1.2.6 de [11]. Le résultat s'obtient ensuite par récurrence sur k . ■

Théorème 2.1.2. *Pour toute fonction f dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, il existe ϕ_0 et ϕ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ telles que, pour t dans \mathbb{R}^* et x dans \mathbb{R}^m , on ait*

$$M_{\mathcal{Q}}f_x(t) = \phi_0(x, t) + \eta(t)\phi_1(x, t),$$

et

$$\frac{\partial^k \phi_1}{\partial t^k}(x, 0) = \frac{c\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)} (\partial \mathcal{Q})^k f_x(0), \quad (3)$$

avec

$$c = (-1)^{\frac{q}{2}} \text{ pour } q \text{ pair,}$$

$$c = (-1)^{\frac{p}{2}} \text{ pour } p \text{ pair et } q \text{ impair}$$

$$c = \frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}}{\pi} \text{ pour } p \text{ impair et } q \text{ impair.}$$

Preuve : Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$. On pose $\phi_k(x) = \frac{c\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k! \Gamma(\frac{n}{2} + k)} (\partial \mathcal{Q})^k f_x(0)$, où la constante c est donnée dans l'énoncé du théorème.

Nous allons tout d'abord montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction $(x, t) \mapsto M_{\mathcal{Q}}f_x(t) - \eta(t) \sum_{k=0}^N \phi_k(x)t^k$ peut se prolonger en une fonction de $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. C'est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*)$ par le lemme 2.1.1. Ainsi, il suffit de prouver que, pour $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, égale à 1 au voisinage de 0, la fonction ψ_N définie par

$$\psi_N(x, t) = M_{\mathcal{Q}}f_x(t) - \eta(t)\alpha(t) \sum_{k=0}^N \phi_k(x)t^k$$

se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. Comme $(\psi_N)_x \in L^1(\mathbb{R})$, nous étudions le comportement en l'infini de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}((\psi_N)_x)$ pour obtenir sa régularité en $t = 0$.

Le lemme 2.1.2 et le calcul de $\mathcal{F}(t^k \eta(t))$ au sens distribution (proposition page 206 de [4]), donnent pour $\lambda \neq 0$, la relation

$$\mathcal{F}((\psi_N)_x)(\lambda) = \sum_{k=1}^N \mathcal{F}(t^k \eta(t) - t^k \alpha(t) \eta(t))(\lambda) \phi_k(x) + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}(p-q)\text{sgn}(\lambda)}}{|2\lambda|^{\frac{n}{2}}} \rho_N(x, \lambda).$$

Maintenant, on remarque que, pour l et k deux entiers tels que $l > k + \frac{n}{2}$, la fonction $t \mapsto \frac{d^l}{dt^l}((1 - \alpha(t))t^k \eta(t))$ est une fonction intégrable sur \mathbb{R} . Ainsi, il existe un réel A_N tel que, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$|\mathcal{F}((1 - \alpha(t))t^k \eta(t))(\lambda)| \leq \frac{A_N}{|\lambda|^{N + \frac{n}{2} + 1}}.$$

Par le lemme 2.1.2, en posant $E_N = C_N + A_N(\sum_{k=0}^N \|\phi_k\|_\infty)$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$|\mathcal{F}((\psi_N)_x)(\lambda)| \leq \frac{E_N}{|\lambda|^{N+\frac{n}{2}+1}}. \quad (4)$$

Soient j_1, \dots, j_m des entiers positifs. On applique ce qui précède en remplaçant f_x par $\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_m}}{\partial x_m^{j_m}} f_x$. On obtient alors qu'il existe un réel $E_N^{j_1, \dots, j_m}$ indépendant de x et t tel que pour x dans \mathbb{R}^m et t dans \mathbb{R}^* , on ait

$$|\mathcal{F}(\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{j_m}}{\partial x_m^{j_m}} (\psi_N)_x)(\lambda)| \leq \frac{E_N^{j_1, \dots, j_m}}{|\lambda|^{N+\frac{n}{2}+1}}. \quad (5)$$

Ainsi, par les propriétés de la transformation de Fourier, la fonction ψ_N se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. Donc la fonction $(x, t) \mapsto M_Q f_x(t) - \eta(t) \sum_{k=0}^N \phi_k(x) t^k$ est aussi dans $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$.

Maintenant concluons.

Par définition des $\varphi_k(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, ces fonctions ont leur support inclus dans un même compact. Par le lemme 2.1.3, il existe une fonction ϕ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial^k \phi}{\partial t^k}(x, 0) = k! \phi_k(x).$$

Soit N un entier positif. Pour tout x dans \mathbb{R}^m et t dans \mathbb{R}^* , on a :

$$\begin{aligned} & M_Q f_x(t) - \eta(t) \phi(x, t) \\ &= M_Q f_x(t) - \eta(t) \sum_{k=0}^N \frac{\partial^k \phi}{\partial t^k}(x, 0) \frac{t^k}{k!} - \eta(t) t^{N+1} \int_0^1 \frac{\partial^{N+1} \phi}{\partial t^{N+1}}(x, tu) \frac{(1-u)^N}{N!} du \\ &= (M_Q f_x(t) - \eta(t) \sum_{k=0}^N \phi_k(x) t^k) - \eta(t) t^{N+1} \int_0^1 \frac{\partial^{N+1} \phi}{\partial t^{N+1}}(x, tu) \frac{(1-u)^N}{N!} du. \end{aligned}$$

Par ce qui précède, les deux termes de cette somme sont dans $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$.

Ainsi la fonction $(x, t) \mapsto M_Q f_x(t) - \eta(t) \phi(x, t)$ est dans $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ pour tout entier N , donc dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$, avec

$$\frac{\partial^k \phi}{\partial t^k}(x, 0) = \frac{c\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)} (\partial Q)^k f_x(0).$$

De plus grâce au lemme 2.1.1, la fonction $(x, t) \mapsto M_Q f_x(t)$ est à support borné tout comme la fonction $(x, t) \mapsto \eta(t) \phi(x, t)$, donc la fonction $(x, t) \mapsto M_Q f_x(t) - \eta(t) \phi(x, t)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. ■

Soit \mathcal{H}_η^m l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*$ dans \mathbb{R} défini par

$$\mathcal{H}_\eta^m := \{(x, t) \mapsto \phi_0(x, t) + \eta(t)\phi_1(x, t); \quad \phi_0, \phi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})\}.$$

Comme pour \mathcal{H}_η , par le lemme de Borel généralisé, on a $\varphi \in \mathcal{H}_\eta^m$ si et seulement si φ est à support compact, de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*$ et s'il existe une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ dont les termes sont de support inclus dans un même compact telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction $(x, t) \mapsto \varphi(x, t) - \eta(t) \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) t^k$ soit de classe \mathcal{C}^l sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ vérifiant $l < N + (n/2)$.

Pour $K \subset \mathbb{R}^{m+1}$ un compact, on note $\mathcal{H}_{\eta, K} = \{\varphi \in \mathcal{H}_\eta; \text{support}(\varphi) \subset K\}$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égale à 1 au voisinage de 0 et de support contenu dans K . On pose $T_N(\varphi)(x, t) = \varphi(x, t) - \chi(t)\eta(t) \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) t^k$.

Pour $(N, l) \in \mathbb{N}^2$ avec $l < N + (n/2)$, $k \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$, on définit les semi-normes suivantes

$$\|\varphi\|_{N, l, \mathbf{i}} = \sup_{(x, t)} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{i_m} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^l T_N(\varphi)(x, t) \right|$$

$$\text{et} \quad B_{k, \mathbf{i}}(\varphi) = \sup_x \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{i_m} \varphi_k(x) \right|.$$

Les semi-normes $\|\varphi\|_{N, l, \mathbf{i}}$ et $B_{k, \mathbf{i}}(\varphi)$ munissent $\mathcal{H}_{\eta, K}^m$ d'une topologie d'espace de Fréchet et \mathcal{H}_η^m est muni de la topologie limite inductive.

Théorème 2.1.3. *L'application*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) & \rightarrow & \mathcal{H}_\eta^m \\ f & \mapsto & (x, t) \mapsto M_{\mathcal{Q}} f_x(t) \end{cases}$$

est continue et surjective.

Preuve : Montrons tout d'abord la surjectivité de cette application. Soient ϕ_0, ϕ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. Par le lemme 2.1.3, il existe g dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ telle que, pour $x \in \mathbb{R}^m$, l'on ait :

$$(\partial \mathcal{Q})^k g(x, 0) = \frac{4^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)}{c \pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial^k \phi_1}{\partial t^k}(x, 0).$$

où c est la constante dépendant de la signature de \mathcal{Q} définie dans le théorème 2.1.2.

Par la relation (3) du théorème 2.1.2 il existe ψ_0 et ψ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ telles que pour x dans \mathbb{R}^m et $t \neq 0$,

$$M_{\mathcal{Q}} g_x(t) = \psi_0(x, t) + \eta(t)\psi_1(x, t), \quad \text{avec} \quad \frac{\partial^k \psi_1}{\partial t^k}(x, 0) = \frac{\partial^k \phi_1}{\partial t^k}(x, 0).$$

Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^*$, on pose $h(x, t) = \psi_1(x, t) - \phi_1(x, t)$ de telle sorte que

$$\frac{\partial^k h}{\partial t^k}(x, 0) = 0, \text{ pour tout entier positif } k$$

Ainsi la fonction $(x, t) \mapsto \eta(t)h(x, t)$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ et donc la fonction $(x, t) \mapsto M_{\mathcal{Q}}g_x(t) - \phi_0(x, t) - \eta(t)\phi_1(x, t) = \psi_0(x, t) - \phi_0(x, t) + \eta(t)h_1(x, t)$. se prolonge en une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$.

Maintenant, l'application $G_* : \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n - \{0\})) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ définie par $G_*(f)(x, t) = M_{\mathcal{Q}}(f_x)(t)$ est surjective (lemme 2.1.1). Il existe donc u dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$ telle que pour tout x dans \mathbb{R}^m et t dans \mathbb{R} ,

$$M_{\mathcal{Q}}u_x(t) = M_{\mathcal{Q}}g_x(t) - \phi_0(x, t) - \eta(t)\phi_1(x, t),$$

ce qui donne la surjectivité.

La continuité s'obtient comme dans la situation $m = 0$ ([4] page page 207) par le théorème du graphe fermé. En effet, soit $(f_k)_k$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ qui converge vers f dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ et telle que $M_{\mathcal{Q}}(f_k)$ converge vers ϕ dans \mathcal{H}_{η}^m . Soit $\beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulle au voisinage de 0. Alors la suite de fonctions $g_k(x, y) = \beta \circ Q(y)f_k(x, y)$ converge vers $g(x, y) = \beta \circ Q(y)f(x, y)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Comme $g_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m - \{0\})$, la continuité de G_* donne $\beta(y)M_{\mathcal{Q}}(f_k)(x, y)$ converge vers $\beta(y)M_{\mathcal{Q}}(f)(x, y)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ et donc dans \mathcal{H}_{η}^m . Ceci étant valable pour toute fonction β comme ci-dessus, on obtient le résultat voulu. ■

2.2 Cas de deux formes quadratiques

Nous allons généraliser les résultats obtenus dans le paragraphe précédent à la situation suivante. Pour $j \in \{1, 2\}$, on fixe p_j et q_j dans \mathbb{N}^* et on pose $n_j = p_j + q_j$. Soit \mathcal{Q}_j la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^{n_j} par

$$\mathcal{Q}_j(x_1, \dots, x_{n_j}) = \sum_{i=1}^{p_j} x_i^2 - \sum_{i=1}^{q_j} x_{i+p_j}^2.$$

On considère l'application

$$H : \begin{cases} \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightarrow & (\mathcal{Q}_1(x), \mathcal{Q}_2(y)) \end{cases}.$$

La restriction $H|_{\mathbb{R}^{n_1} - \{0\} \times \mathbb{R}^{n_2} - \{0\}}$ est une surjection submersive de $\mathbb{R}^{n_1} - \{0\} \times \mathbb{R}^{n_2} - \{0\}$ dans \mathbb{R}^2 . Par la proposition 2.0.1, l'application H_* se prolonge en une application $M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$. Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ la fonction $M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}f$ vérifie, pour tout $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, la relation suivante

$$\int_{\mathbb{R}_1^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}} F \circ H(x, y) f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} F(t_1, t_2) M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (6)$$

Pour $i \in \{1, 2\}$ on pose η_i la "fonction singularité" relative à \mathcal{Q}_i .

Lemme 2.2.1. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$. Alors pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on a

$$M_{\mathcal{Q}_1}((M_{\mathcal{Q}_2}f_x)^{t_2})(t_1) = M_{\mathcal{Q}_2}((M_{\mathcal{Q}_1}f^y)_{t_1})(t_2) = M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}f(t_1, t_2).$$

Preuve : Par la relation (6), pour tout $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} F(t_1, t_2) M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \int_{\mathbb{R}_1^n \times \mathbb{R}^{n_2}} F(\mathcal{Q}_1(x), \mathcal{Q}_2(y)) f(x, y) dx dy = \\ \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \int_{\mathbb{R}} F(\mathcal{Q}_1(x), t_2) M_{\mathcal{Q}_2}f_x(t_2) dt_2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} F(t_1, t_2) M_{\mathcal{Q}_1}((M_{\mathcal{Q}_2}f_x)^{t_2})(t_1) dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

Ces égalités étant vraies pour toute fonction F de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on obtient

$$M_{\mathcal{Q}_1}((M_{\mathcal{Q}_2}f_x)^{t_2})(t_1) = M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}f(t_1, t_2).$$

De même, on montre que

$$M_{\mathcal{Q}_2}((M_{\mathcal{Q}_1}f^y)_{t_1})(t_2) = M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}f(t_1, t_2).$$

■

Théorème 2.2.1. Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$, il existe des fonctions ψ_0, ψ_1, ψ_2 et ψ_3 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telles que pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on ait

$$M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2}f(t_1, t_2) = \psi_0(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\psi_1(t_1, t_2) + \eta_2(t_2)\psi_2(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\eta_2(t_2)\psi_3(t_1, t_2).$$

Preuve : Le théorème 2.1.2 nous donne l'existence de fonctions ϕ_0 et ϕ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R})$ telles que pour $(x, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^*$, on ait $M_{\mathcal{Q}_2}f_x(t_2) = \phi_0(x, t_2) + \eta_2(t_2)\phi_1(x, t_2)$ et donc

$$M_{\mathcal{Q}_1}((M_{\mathcal{Q}_2}f_x)^{t_2})(t_1) = M_{\mathcal{Q}_1}((\phi_0)^{t_2})(t_1) + \eta_2(t_2)M_{\mathcal{Q}_1}((\phi_1)^{t_2})(t_1).$$

Grâce au théorème 2.1.2, il existe des fonctions ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 et ϕ_5 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telles que pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on ait

$$M_{\mathcal{Q}_1}((\phi_0)^{t_2})(t_1) = \phi_2(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\phi_3(t_1, t_2)$$

et

$$M_{\mathcal{Q}_1}((\phi_1)^{t_2})(t_1) = \phi_4(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\phi_5(t_1, t_2).$$

Le lemme 2.2.1 permet de conclure. ■

Soit $\mathcal{H}_{\eta_1, \eta_2}$ le sous ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ dans \mathbb{R} défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\eta_1, \eta_2} = \{ &(t_1, t_2) \mapsto \psi_0(t_1, t_2) + \eta_1(t_1)\psi_1(t_1, t_2) + \eta_2(t_2)\psi_2(t_1, t_2) \\ &+ \eta_1(t_1)\eta_2(t_2)\psi_3(t_1, t_2); \quad \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on a $\varphi \in \mathcal{H}_{\eta_1, \eta_2}$ si et seulement si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)$ et à support compact et s'il existe des suites $(A_{k,l}(\varphi))_{k,l \in \mathbb{N}}$, $(B_{k,l}(\varphi))_{k,l \in \mathbb{N}}$ et $(C_{k,l}(\varphi))_{k,l \in \mathbb{N}}$ telles que la fonction $R_N(\varphi)(t_1, t_2) = \varphi(t_1, t_2) - \eta_1(t_1) \sum_{k,l \leq N} t_1^k t_2^l A_{k,l}(\varphi) - \eta_2(t_2) \sum_{k,l \leq N} t_1^k t_2^l B_{k,l}(\varphi) - \eta_1(t_1) \eta_2(t_2) \sum_{k,l \leq N} t_1^k t_2^l C_{k,l}(\varphi)$ soit de classe \mathcal{C}^m pour tout $m < N + \frac{n}{2}$.

Pour K une partie compacte de \mathbb{R}^2 , on note $\mathcal{H}_{\eta_1, \eta_2, K}$ le sous-espace de $\mathcal{H}_{\eta_1, \eta_2}$ formé des fonctions à support dans K . On fixe χ_1 et χ_2 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, à support contenu dans K et égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$T_N(\varphi)(t_1, t_2) = \varphi(t_1, t_2) - \chi_1(t_1) \eta_1(t_1) \sum_{k,l=0}^N t_1^k t_2^l A_{k,l}(\varphi) - \chi_2(t_2) \eta_2(t_2) \sum_{k,l=0}^N t_1^k t_2^l B_{k,l}(\varphi) - \chi_1(t_1) \chi_2(t_2) \eta_1(t_1) \eta_2(t_2) \sum_{k,l \leq N} t_1^k t_2^l C_{k,l}(\varphi).$$

On introduit les semi-normes suivantes

$$\|\varphi\|_{l,k,N} = \sup_{(t_1, t_2)} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right)^l T_N(\varphi)(t_1, t_2) \right| \quad \text{pour } l + k \leq N + (n/2).$$

Les semi-normes $\|\varphi\|_{l,k,N}$, $|A_{k,l}(\varphi)|$, $|B_{k,l}(\varphi)|$ et $|C_{k,l}(\varphi)|$ munissent $\mathcal{H}_{\eta_1, \eta_2, K}$ d'une structure d'espace de Fréchet. L'espace $\mathcal{H}_{\eta_1, \eta_2}$ est munie de la topologie limite inductive.

Proposition 2.2.1. *L'application*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) & \rightarrow & \mathcal{H}_{\eta_1, \eta_2} \\ f & \mapsto & (t_1, t_2) \mapsto M_{Q_1, Q_2} f(t_1, t_2) \end{cases}$$

est continue et surjective.

Preuve : Montrons la surjectivité. Soient ψ_0, ψ_1, ψ_2 , et $\psi_3 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Grâce au théorème 2.1.3, il existe f et g dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R})$ telles que pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on ait

$$\begin{aligned} M_{Q_1}(f^{t_2})(t_1) &= \psi_0(t_1, t_2) + \eta_1(t_1) \psi_1(t_1, t_2) \\ \text{et} \quad M_{Q_1}(g^{t_2})(t_1) &= \psi_2(t_1, t_2) + \eta_1(t_1) \psi_3(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Toujours grâce au théorème 2.1.3, il existe $k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ telle que pour $(x, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^*$, on ait $M_{Q_2} k_x(t_2) = f(x, t_2) + \eta_2(t_2) g(x, t_2)$. Le lemme 2.2.1 donne alors la surjectivité. La continuité est immédiate par le théorème 2.1.3. ■

3 Comportement des intégrales orbitales

3.1 Normalisation des intégrales orbitales

L'intégrale orbitale d'une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$ est la fonction définie sur \mathfrak{q}^{reg} comme la moyenne de f sur chaque orbite $H \cdot X$ pour $X \in \mathfrak{q}^{reg}$, ceci pour une mesure H -invariante sur $H \cdot X$ que nous allons maintenant préciser.

Soit p la dimension de \mathfrak{q} . On note dZ la mesure H -invariante sur \mathfrak{q} définie par la densité μ donnée par $\mu(\xi_1, \dots, \xi_p) = |\det(\omega(\xi_i, \xi_j)_{i,j})|^{\frac{1}{2}}$.

Pour $X \in \mathfrak{q}^{reg}$ et $\mathfrak{a} = Z_{\mathfrak{q}}(X)$, on note $\Pi = \left| \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha^{m_{\alpha}} \right|$.

Par le lemme 1.20 et le théorème 1.27 de [15], il existe une unique mesure H -invariante $d\dot{h}$ sur $H/Z_H(X)$ normalisée de telle sorte que, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$, l'on ait

$$\int_{H \cdot \mathfrak{a}} f(Z) dZ = \frac{1}{|W_H(\mathfrak{a})|} \int_{\mathfrak{a}^{reg}} \left(\int_{H/Z_H(X)} f(h \cdot X) d\dot{h} \right) \Pi(X) dX.$$

On rappelle que la fonction δ , définie dans le paragraphe 1.3, vérifie

$$|\delta(X)| = \left| \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha^{m_{\alpha}-1}(X) \right| \quad \text{et} \quad \delta^2 = S_0.$$

Définition 3.1.1. Pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$, on définit son intégrale orbitale sur \mathfrak{q}^{reg} par

$$\mathcal{M}_H(f)(X) = |\delta(X)| \int_{H/Z_H(X)} f(h \cdot X) d\dot{h}.$$

La normalisation des intégrales orbitales choisie ci-dessus coïncide, à une fonction localement constante sur \mathfrak{q}^{reg} près, avec celle de J. Faraut dans [5] pour les espaces hyperboliques et celles de Harish-Chandra pour les algèbres de Lie réductives réelles ([21] partie I, paragraphe 3).

Par ailleurs, nous verrons que la fonction δ joue un rôle essentiel dans le calcul des composantes radiales des opérateurs différentiels H -invariants à coefficients constants sur \mathfrak{q} et la normalisation choisie est particulièrement bien adaptée pour l'étude ultérieure des distributions propres invariantes sur \mathfrak{q} .

Lemme 3.1.1. ([15] Théorème 1.23). Soit $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$. Alors, pour tout $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q})$, la fonction $\mathcal{M}_H f|_{\mathfrak{a}^{reg}}$ est de classe \mathcal{C}^{∞} et à support borné dans \mathfrak{a}^{reg} .

Définition 3.1.2. Par le lemme 1.3.1, pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \cup \{(\lambda, \bar{\lambda}); \lambda \in \mathbb{C}\}$ il existe une unique H -orbite semi-simple $\mathcal{O}(\lambda_1, \lambda_2)$ de \mathfrak{q} telle que pour tout $X \in \mathcal{O}(\lambda_1, \lambda_2)$, l'on ait $\{u(X), v(X)\} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. De plus, on a $\mathcal{O}(\lambda_1, \lambda_2) \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \neq \emptyset$ si et seulement si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{O}(\lambda_1, \lambda_2) \cap \mathfrak{a}_2 \neq \emptyset$ si et seulement si $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$.

Pour F une fonction H -invariante sur \mathfrak{q}^{reg} , on définit les fonctions $F_{\mathfrak{m}}$ et F_2 par :

$$\begin{aligned} \text{si } (t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag alors } F_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) &= F(X) \text{ où } X \in \mathcal{O}(t_1, t_2) \\ \text{et si } (\tau, \theta) \in (\mathbb{R}^*)^2 \text{ alors } F_2(\tau, \theta) &= F(X_{\tau, \theta}) \text{ où } X_{\tau, \theta} \in \mathfrak{a}_2. \end{aligned}$$

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$, on notera pour simplifier $\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}} = (\mathcal{M}_H(f))_{\mathfrak{m}}$ et $\mathcal{M}f_2 = (\mathcal{M}_H(f))_2$.

Avec les notations précédentes, la formule d'intégration de Weyl s'écrit sous la forme suivante :

Lemme 3.1.2. Soit $\Phi \in L_{loc}^1(\mathfrak{q})^H$ et $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$. On a la formule d'intégration suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{q}} \Phi(X) f(X) dX &= \int_{t_1 > t_2} (|\delta|\Phi)_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &+ 8 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} (|\delta|\Phi)_2(\tau, \theta) \mathcal{M}f_2(\tau, \theta) (\tau^2 + \theta^2) d\theta d\tau. \end{aligned}$$

Preuve : Avec la normalisation des mesures choisies précédemment, la formule d'intégration de Weyl s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{q}} \Phi(X) f(X) dX &= \sum_{\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle} \int_{H \cdot \mathfrak{a}} \Phi(Z) f(Z) dZ \text{ avec } \int_{H \cdot \mathfrak{a}} f(Z) dZ = \\ &\frac{1}{|W_H(\mathfrak{a})|} \int_{\mathfrak{a}} \Phi(X) \mathcal{M}_H(f)(X) \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(X) dX. \end{aligned}$$

Plaçons-nous sur $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{+,+}$. Un élément de $\mathfrak{a}_{+,+}$ s'écrit $X_{u_1, u_2} = u_1 H_1 + u_2 \kappa(H_1)$. Comme la base $\{H_1, \kappa(H_1)\}$ est orthonormale, on obtient donc

$$\int_{H \cdot \mathfrak{a}_{+,+}} \Phi(Z) f(Z) dZ = \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(X_{u_1, u_2}) \mathcal{M}_H(f)(X_{u_1, u_2}) |4u_1 u_2 (u_1^2 - u_2^2)| du_1 du_2.$$

Comme les fonctions considérées sont H -invariantes, un simple changement de variables donne

$$\int_{H \cdot \mathfrak{a}} \Phi(Z) f(Z) dZ = \int_{t_1 > t_2 > 0} |t_1 - t_2| \Phi_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Un raisonnement analogue sur $\mathfrak{a}_{+,-}$ et $\mathfrak{a}_{-,-}$ conduit à

$$\sum_{\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) \rangle} \int_{H \cdot \mathfrak{a}} \Phi(Z) f(Z) dZ = \int_{t_1 > t_2} (|\delta|\Phi)_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Pour \mathfrak{a}_2 , on considère la base H_3 et $H_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & 0 \end{array} \right)$ qui

est orthogonale et de volume 2 pour ω . Ainsi, on a

$$\int_{H \cdot \mathfrak{a}_2} \Phi(Z) f(Z) dZ = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(X_{\tau, \theta}) \mathcal{M}_H(f)(X_{\tau, \theta}) |4\tau\theta| (\tau^2 + \theta^2) d\tau d\theta$$

$$= 8 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} (|\delta|\Phi)_2(\tau, \theta) \mathcal{M}f_2(\tau, \theta) (\tau^2 + \theta^2) d\tau d\theta.$$

■

La suite de cette partie est consacrée à l'étude du comportement des intégrales orbitales $\mathcal{M}_H(f)$ au voisinage des points semi-réguliers de \mathfrak{q} .

3.2 Méthode de descente

Nous rappelons tout d'abord des résultats de S. Sano ([16] paragraphe 2) concernant les décompositions radicielles.

On note τ la conjugaison de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ relative à la forme réelle \mathfrak{g} . Soit $\mathfrak{a} \in \text{Car}(\mathfrak{q})$. On a alors la décomposition suivante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \quad \text{où} \quad \mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}.$$

Il existe une base $(T_j)_{1 \leq j \leq 12}$ de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}$ vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $j \in \{1, \dots, 12\}$, il existe $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ telle que $T_j = X_j + \sigma(X_j)$ où $X_j \in \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$ si α est réelle ou imaginaire et $X_j \in \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha\tau}^{\mathbb{C}}$ si α est complexe. On pose $\gamma(T_j) = X_j - \sigma(X_j)$ si α est réelle ou complexe et $\gamma(T_j) = \iota(X_j - \sigma(X_j))$ si α est imaginaire. La famille $\gamma(T_j)$ est alors une base de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}$.

Si $X \in \mathfrak{a}$, alors $\text{ad}(X)$ induit un morphisme de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}$. On note $\det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})}^{\mathfrak{q}/\mathfrak{a}})$ le déterminant de $\text{ad}(X)$ dans la base choisie précédemment. Par un calcul analogue à celui de S. Sano ([16] proposition 2.1), on obtient alors

$$\left| \det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})}^{\mathfrak{q}/\mathfrak{a}}) \right| = \left| \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha(X)^{m_{\alpha}} \right|.$$

On considère maintenant $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{l} = \mathfrak{z}_3$. On a alors $\text{car}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}) = \{\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q}), \mathfrak{a} \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}\}$ et pour $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q} \cap \mathfrak{l})$, on remarque que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$. On peut décomposer $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ de manière analogue à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, ce qui permet d'obtenir

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q} \oplus (\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}),$$

où $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) - \Delta(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$. La famille formée des T_j (respectivement $\gamma(T_j)$) associés à une racine $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+ - \Delta(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+$ définit une base de $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}$ (respectivement de $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}$). Si $X \in \mathfrak{a}$, alors $\text{ad}(X)$ induit un morphisme de $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}$. On note $\det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}}^{\mathfrak{q}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}})$ son déterminant dans les bases choisies et on a

$$\left| \det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}}^{\mathfrak{q}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}}) \right| = \left| \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+ - \Delta(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha(X)^{m_{\alpha}} \right|.$$

Lemme 3.2.1. On pose $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}, \left| \det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}}^{\mathfrak{q}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}}) \right| \neq 0\}$. L'application $\gamma : H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$ définie par $\gamma(h, X) = h \cdot X$ est submersive en tout point de $H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$. En particulier, l'intégration sur les fibres (lemme 2.0.1) définit la surjection γ_* de $\mathcal{D}(H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q})$ dans $\mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q})$.

Preuve : Pour $(h, X) \in H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$, $(A, X') \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\gamma(h \exp(tA), X + tX') = \text{Ad}(h)(X + tX' + t[A, X] + t^2Y)$$

avec $Y \in \mathfrak{q}$. Par suite la différentielle de γ en un point $(h, X) \in H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$ est donnée par $d_{(h, X)}\gamma(A, X') = \text{Ad}(h)(X' + [A, X])$. Comme $[X, \mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}$ et $[X, \mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{q}$, la discussion précédente donne le lemme. ■

3.3 Etude de $\mathcal{M}_H(f)$ pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$

On rappelle que $N = N_H(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et on considère la submersion surjective $\gamma : H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \rightarrow H \cdot \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ obtenue dans le paragraphe précédent pour $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$.

Précisons tout d'abord les fibres de γ . Par le lemme 3.2.1 et la remarque 1.3.1, pour tout $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, on a $\delta^2(X) = S_0(X) = \left| \det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}}^{\mathfrak{q}/\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}}) \right|$ et donc $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}; S_0(X) \neq 0\}$. Par le lemme 1.4.2, pour $X \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, on obtient donc $\gamma^{-1}(X) = \{(h, h^{-1} \cdot X); h \in N\}$.

Pour $\phi \in \mathcal{D}(H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et $h \cdot X \in H \cdot \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, on pose :

$$\pi_*(\phi)(h \cdot X) = \delta(X)\gamma_*(\phi)(h \cdot X) = \delta(X)^{-1} \int_N \phi(hu^{-1}, u \cdot X) du$$

L'application π_* est surjective de $\mathcal{D}(H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ sur $\mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ puisque γ_* l'est.

Soit p la projection de $H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ sur $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$. La surjection $p_* : \mathcal{D}(H \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ est alors donnée par

$$p_*(\phi)(X) = \int_H \phi(h, X) dh.$$

L'intégrale orbitale sur $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ d'une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ est définie , pour $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$, par :

$$\mathcal{M}_N(f)(X) := \int_{N/Z_H(X)} f(h \cdot X) d\dot{h}$$

Cette normalisation est compatible avec celle définie en début de paragraphe puisque, d'une part, $Z_N(X) = Z_H(X) \subset N$ par le lemme 1.4.2 et d'autre part, pour tout $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$, les racines de $\Delta(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ sont toutes de multiplicité un.

Proposition 3.3.1. *Pour $\phi \in \mathcal{D}(H \times^1 \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on a*

$$\mathcal{M}_H(\pi_*(\phi))(X) = \mathcal{M}_N(p_*(\phi))(X).$$

Preuve : Comme H et $Z_H(X)$ sont unimodulaires, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_H(\pi_*(\phi))(X) &= \delta(X) \int_{H/Z_H(X)} \pi_*(\phi)(h \cdot X) d\dot{h} = \int_{H/Z_H(X)} \int_N \phi(hu^{-1}, u \cdot X) du d\dot{h} \\ &= \int_{H/Z_H(X)} \int_{N/Z_H(X)} \int_{Z_H(X)} \phi(hv^{-1}u^{-1}, u \cdot X) dv d\dot{u} d\dot{h}. \\ &= \int_H \int_{N/Z_H(X)} \phi(hu^{-1}, u \cdot X) d\dot{u} d\dot{h} = \mathcal{M}_N(p_*(\phi))(X). \end{aligned}$$

■

Nous allons maintenant exprimer l'intégrale orbitale $\mathcal{M}_N(g)$ pour $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ en terme d'une application moyenne $M_{Q_1, Q_2}(\bar{g})$ définie dans le paragraphe 2.2 où $\bar{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ dépend de f .

On reprend les notations du paragraphe 1.4.1, en particulier, on écrit $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$. On pose $Z_1 = Z_H(H_1) = \{diag(a, b, a, d) \in GL(4, \mathbb{R})\}$ et $Z_2 = \kappa(Z_1)$.

Lemme 3.3.1. *Si $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$ alors, on a les isomorphismes de groupes :*

$$\begin{aligned} N^0/Z_H(X) &\simeq Z_1/Z_H(X) \times Z_2/Z_H(X) \\ &\simeq \{diag(1, 1, 1, d); d \in \mathbb{R}^*\} \times \{diag(1, 1, c, 1); c \in \mathbb{R}^*\} \end{aligned}$$

Preuve : Par le lemme 1.4.2, on a $Z_H(X) = \{diag(\alpha, \beta, \alpha, \beta) \in GL(4, \mathbb{R})\}$. Les isomorphismes donnés sont alors clairs. ■

On note q la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^2 par $q(x, y) = x^2 - y^2$. On définit l'isomorphisme ψ de \mathbb{R}^2 dans $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q}$ par $\psi(x, y) =$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & 0 & 0 \\ & & 0 & x+y \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & x-y & & 0 \end{array} \right) \text{ de telle sorte que } Q \circ \psi = q.$$

Lemme 3.3.2. *Pour $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q})$ et $X_1 \in (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q})^{reg}$, on a*

$$\int_{Z_1/Z_{Z_1}(X_1)} g(u \cdot X_1) d\dot{u} = M_{Q \circ \psi}(g \circ \psi)(Q(X_1)).$$

Preuve : Pour $X_1 \in (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q})^{reg}$, le groupe $Z_{Z_1}(X_1) = \{diag(\alpha, \beta, \alpha, \beta) \in GL(4, \mathbb{R})\}$ est indépendant de X_1 . On le note C_1 . La formule d'intégration de Weyl sur $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q}$ assure que, pour tout $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q}} F \circ Q(X_1) g(X_1) dX_1 &= \int_{\mathbb{R}_+} 2xF(x^2) \int_{Z_1/C_1} g(u \cdot \psi(x, 0)) d\dot{u} dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+} 2yF(-y^2) \int_{Z_1/C_1} g(u \cdot \psi(0, y)) d\dot{u} dy. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\int_{\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{q}} g(X_1) F \circ Q(X_1) dX_1 = \int_{\mathbb{R}^2} g \circ \psi(x, y) F(x^2 - y^2) dx dy = \int_{\mathbb{R}} M_{Q \circ \psi}(g \circ \psi)(t) F(t) dt$ ce qui donne le résultat voulu. ■

De même, l'application $\kappa \circ \psi$ définit un isomorphisme de \mathbb{R}^2 dans $\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{q}$ tel que $Q \circ \kappa \circ \psi = q$ et on obtient un résultat similaire sur $\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{q}$.

Pour $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ on définit l'application \tilde{g} sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par $\tilde{g}(u, v) = g(\psi(u) + \kappa \circ \psi(v))$.

Corollaire 3.3.1. *Pour $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et $X = X_1 + X_2 \in (\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on a*

$$\mathcal{M}_{N^0}(g)(X) = \int_{Z_1/Z_H(X) \times Z_2/Z_H(X)} g(u_1 \cdot X_1 + u_2 \cdot X_2) du_1 du_2 = M_{q,q} \tilde{g}(Q(X_1), Q(X_2))$$

Preuve : Ceci se déduit immédiatement du lemme précédent et du lemme 2.2.1. ■

Corollaire 3.3.2. *Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$. Alors, il existe $f_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ à support dans $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; q(u) \neq q(v)\}$, telle que, pour $X = X_1 + X_2 \in (\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on ait*

$$\mathcal{M}_H(f)(X) = M_{q,q} f_0(Q(X_1), Q(X_2)) + M_{q,q} f_0(Q(X_2), Q(X_1))$$

Preuve : Comme l'application π_* est surjective, il existe $\phi \in \mathcal{D}(H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ telle que $f = \pi_*(\phi)$. Par la proposition 3.3.1, pour tout $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on a $\mathcal{M}_H(f)(X) = \mathcal{M}_N(p_*(\phi))(X) = \mathcal{M}_{N^0}(p_*(\phi))(X) + \mathcal{M}_{N^0}(\widetilde{p_*(\phi)})(\kappa(X))$. Le corollaire précédent permet de conclure en prenant $f_0 = \widetilde{p_*(\phi)}$. ■

Selon la définition 3.1.2, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - diag$, on note $\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) = \mathcal{M}_H(f)(X_{t_1, t_2})$ où $X_{t_1, t_2} \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ vérifie $\{u(X_{t_1, t_2}), v(X_{t_1, t_2})\} = \{t_1, t_2\}$.

On définit le sous-espace \mathcal{H}_{\log}^2 de $\mathcal{H}_{\eta, \eta}$ avec $\eta(t) = \log(t)$, par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\log}^2 = \{ & (t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - diag \mapsto \varphi_0(t_1, t_2) + \log |t_1| \varphi_1(t_1, t_2) \\ & + \log |t_2| \varphi_1(t_2, t_1) + \log |t_1| \log |t_2| \varphi_2(t_1, t_2); \quad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 - diag); \\ & \varphi_0 \text{ et } \varphi_2 \text{ sont symétriques par rapport aux deux variables} \}. \end{aligned}$$

Théorème 3.3.1. 1. *Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$, on a $\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{H}_{\log}^2$*

2. *L'application*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) & \rightarrow \mathcal{H}_{\log}^2 \\ f & \mapsto \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}} \end{cases}$$

est continue et surjective.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$. Par le corollaire 3.3.2, il existe $f_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, à support dans $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; q(u) \neq q(v)\}$, telle que pour $X = X_1 + X_2 \in (\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{q}^{reg}$ avec $t_1 = Q(X_1)$ et $t_2 = Q(X_2)$, on ait $\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) = \mathcal{M}_H(f)(X) = M_{q,q}f_0(t_1, t_2) + M_{q,q}f_0(t_2, t_1)$. Grâce au théorème 2.2.1 et compte-tenu du support de f_0 , on obtient alors $\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{H}_{\log}^2$.

Montrons maintenant la surjectivité de l'application. Soit $F \in \mathcal{H}_{\log}^2$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $|t_1 - t_2| < \sqrt{\varepsilon}$ on ait $F(t_1, t_2) = 0$. D'après la proposition 2.2.1, il existe $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ tel que pour $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on ait

$$F(t_1, t_2) = M_{q,q}f(t_1, t_2) = M_{q,q}\left(\frac{f}{2}\right)(t_2, t_1) + M_{q,q}\left(\frac{f}{2}\right)(t_1, t_2)$$

puisque les fonctions considérées sont symétriques par rapport aux deux variables.

Grâce au corollaire 3.3.1, la fonction $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ définie par $g(X_1 + X_2) = \frac{1}{2}f(\psi^{-1}(X_1), \kappa \circ \psi^{-1}(X_2))$ pour $X_j \in \mathfrak{m}_j \cap \mathfrak{q}$, vérifie, pour tout $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$, les relations

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{N^0}g(X) &= \frac{1}{2}M_{q,q}f(Q(X_1), Q(X_2)) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{N^0}g \circ \kappa(X) = \\ &= \frac{1}{2}M_{q,q}f(Q(X_2), Q(X_1)). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\mathcal{M}_Ng(X) = F(Q(X_1), Q(X_2))$.

Maintenant, on fixe une fonction χ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi|_{[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}]} = 1$ et $\chi|_{\mathbb{R} - [-\varepsilon; \varepsilon]} = 0$. La fonction $(1 - \chi \circ S_0)g$ appartient cette fois-ci à $\mathcal{D}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et vérifie $\mathcal{M}_N((1 - \chi \circ S_0)g)(X) = (1 - \chi((t_1 - t_2)^2))F(t_1, t_2) = F(t_1, t_2)$, pour $X = X_1 + X_2$ tel que $Q(X_1) = t_1$ et $Q(X_2) = t_2$.

Par la surjectivité de p_* , il existe $\phi \in \mathcal{D}(H \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ telle que $(1 - \chi \circ S_0)g = p_*(\phi)$ et par la proposition 3.3.1 on a $\mathcal{M}_H(\pi_*(\phi))(X) = \mathcal{M}_N(p_*(\phi))(X) = F(t_1, t_2)$ ce qui donne la surjectivité. La continuité est immédiate par le théorème du graphe fermé. ■

3.4 Etude de $\mathcal{M}_H(f)$ pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$

On rappelle (lemme 1.4.4) que $N_3 = N_H(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}) = N_3^0 \cap \tilde{K}N_3^0$ avec $\tilde{K} = \left(\frac{I_2}{0} \middle| \frac{0}{-I_2}\right)$ et $N_3^0 = \left\{\left(\frac{A}{0} \middle| \frac{0}{A}\right); A \in GL(2, \mathbb{R})\right\}$. On note $\gamma_3 : H \times \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} \rightarrow H \cdot \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ la submersion surjective obtenue dans le lemme 3.2.1 pour $\mathfrak{l} = \mathfrak{z}_3$.

Lemme 3.4.1. 1. On garde les notations du paragraphe 3.2. Pour $X \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$, on pose $\nu_3(X) = |\det(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}})|$.

Si $X = \left(\frac{0}{Y} \middle| \frac{Y}{0}\right) \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ alors on a $\nu_3(X) = 4(\text{tr}Y)^2|\det(Y)|$.

En particulier, on a $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} = \{X = \left(\frac{0}{Y} \middle| \frac{Y}{0}\right); \text{tr}Y \det Y \neq 0\}$.

2. Soit $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ = \left\{ \left(\frac{0}{Y} \middle| \frac{Y}{0} \right); \quad (trY)^2 \det(Y) > 0 \right\}$. Alors

$$H \cdot \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} = H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+.$$

3. Si $h \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \cap (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \neq \emptyset$ alors $h \in N_3$.

Preuve : Soit $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}) \rangle$ et $X \in \mathfrak{a}$. Comme $\Delta((\mathfrak{z}_3)_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+ = \{\beta_1\}$, le lemme 3.2.1 donne $\nu_3(X) = |(\alpha_1 \alpha_2 \beta_2^2)(X)|$. Or, par la remarque 1.3.1, on a $(\alpha_1 \alpha_2)(X) = 4\sqrt{S(X)} = 4|\det(Y)|$ et $\beta_2^2(X) = (trY)^2$, et donc $\nu_3(X) = 4(trY)^2|\det(Y)|$. L'assertion 1. s'en déduit par densité des éléments semi-simples.

Soit $X = \left(\frac{0}{Y} \middle| \frac{Y}{0} \right) \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$. Si $\det(Y) > 0$ alors $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ sinon la matrice Y possède deux valeurs propres non nulles de signe contraire. En particulier, il existe $P \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que $PYP^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$ avec $u_1 u_2 < 0$. On a alors

$$\varrho \left(\left(\frac{P}{0} \middle| \frac{0}{P} \right) \cdot \left(\frac{0}{Y} \middle| \frac{Y}{0} \right) \right) = \left(\frac{0}{u_1 \quad 0} \middle| \frac{u_1 \quad 0}{0 \quad -u_2} \right)$$

$$\text{avec } \varrho = \text{Ad} \left(\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{0} \middle| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{0} \right) \text{ ce qui donne l'assertion 2.}$$

Soit $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ et $h \in H$ tels que $h \cdot X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$.

Si X est régulier dans \mathfrak{q} alors, par le lemme 1.4.4, il existe $h_0 \in N_3$ tel que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(h_0 \cdot X) = \mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{+,+}$ ou $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2$. Comme $h \cdot X$ est également régulier et l'action adjointe d'un élément de H ne modifie pas la nature réelle ou complexe des racines, il existe $h_1 \in N_3$ tel que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(h_1 h \cdot X) = \mathfrak{a}$. Ainsi, on a $h_1 h h_0^{-1} \in N_H(\mathfrak{a})$. Comme $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$, le lemme 1.2.2 assure que $h_1 h h_0^{-1} \in N_3$ et donc $h \in N_3$.

Si X n'est pas régulier, on écrit $X = \left(\frac{0}{Y} \middle| \frac{Y}{0} \right)$ et les deux valeurs propres de Y sont égales. Ainsi, la décomposition de Jordan de Y s'écrit sous la forme $Y = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} + Y_n$, où Y_n est une matrice nilpotente et u est un réel non nul.

En notant $h = \left(\frac{A}{0} \middle| \frac{0}{B} \right)$, on a $h \cdot X = u \left(\frac{0}{BA^{-1}} \middle| \frac{AB^{-1}}{0} \right) + h \cdot \left(\frac{0}{Y_n} \middle| \frac{Y_n}{0} \right)$ et ceci est la décomposition de Jordan de $h \cdot X$ dans \mathfrak{z}_3 ([21])

Partie I, lemme 3 du chapitre 1). On obtient donc $u \left(\frac{0}{BA^{-1}} \middle| \frac{AB^{-1}}{0} \right) \in \mathfrak{z}_3$. Ainsi, on a $AB^{-1} = BA^{-1}$ et par suite, il existe P dans $GL(2, \mathbb{R})$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dans $\{\pm 1\}$ tels que $AB^{-1} = P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} P^{-1}$. Ainsi

$$h \cdot X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & AY A^{-1} P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ \hline P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} P^{-1} AY A^{-1} & 0 \end{array} \right).$$

Comme $h \cdot X$ est dans $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ alors $0 < \det(AY A^{-1} P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} P^{-1}) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \det(Y)$. Comme $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$, on a $\det(Y) > 0$ et donc $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. On obtient alors $h \in N_3$, d'où l'assertion \mathfrak{z} . ■

Nous souhaitons préciser le comportement des intégrales orbitales au voisinage des points H -conjugués à $\mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_2 \subset (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$. Pour cette étude, nous considérons la submersion surjective

$$\pi_3 : H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \rightarrow H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+.$$

Par le lemme 3.4.1, pour $h \cdot X \in H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$, on a $\pi_3^{-1}(h \cdot X) = \{(hu^{-1}, u \cdot X); u \in N_3\}$. Ainsi, l'application surjective $(\pi_3)_* : \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) \rightarrow \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ est donnée par

$$(\pi_3)_*(\varphi)(h \cdot X) = \nu_3(X)^{-1} \int_{N_3} \varphi(hu^{-1}, u \cdot X) du$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et $(h, X) \in H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$.

Lemme 3.4.2. *Pour $\tau \in \mathbb{R}$ et $X' \in [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$, tel que $\tau H_3 + X'$ soit dans $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on a :*

$$Z_H(\tau H_3 + X') = Z_{N_3^0}(X').$$

Preuve : On note $X = \tau H_3 + X' = \left(\frac{0}{Y} \middle| \frac{Y}{0} \right)$. Montrons dans un premier temps que $Z_H(X)$ est inclus dans N_3^0 .

Soit $h \in Z_H(X)$. Comme X est régulier, par le lemme 1.4.4, il existe $h_1 \in N_3$ tel que $X_1 = h_1 \cdot X$ soit un élément de $\mathfrak{a}_{+,+}$ ou de \mathfrak{a}_2 . Si $X_1 \in \mathfrak{a}_2$ alors X_1 et donc X appartiennent à $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ et le lemme 3.4.1 donne $h \in N_3$. Si $X_1 \in \mathfrak{a}_{+,+}$ alors $h_1 h h_1^{-1} \in Z_H(X_1) \subset N_3$ par le lemme 1.4.2 et donc, on a également $h \in N_3$.

Maintenant, par régularité de X , on a également $tr(Y) \neq 0$ et donc Y et $-Y$ ne sont pas conjugués ce qui implique que $h \in N_3^0$.

Or, pour h dans N_3^0 , on a $h \cdot (\tau H_3 + X') = \tau H_3 + h \cdot X'$ ce qui donne le lemme. ■

On introduit la fonction δ_3 définie sur $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ par :

$$\delta_3(\tau H_3 + X') = i^{Y(-Q(X'))} \sqrt{2|Q(X')|}.$$

où $\tau \in \mathbb{R}$ et $X' \in [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$. Pour $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$ et $X \in \mathfrak{a}$, on a

$$|\delta_3(X)| = \left| \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{z}_3)_{\mathbb{C}, \mathfrak{a}\mathbb{C}}} \alpha^{m_\alpha - 1}(X) \right|.$$

L'intégrale orbitale d'une fonction $f \in \mathcal{D}((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, est alors donnée pour $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$, par :

$$\mathcal{M}_{N_3}(f)(X) = |\delta_3(X)| \int_{N_3/Z_{N_3}(X)} f(h \cdot X) dh.$$

On note p_3 la projection de $H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ sur $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$. Compte-tenu de la normalisation des intégrales orbitales choisie, on introduit l'application $(\tilde{p}_3)_*$ définie sur $\mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ par

$$(\tilde{p}_3)_*(\phi)(X) = \frac{|\delta(X)|}{|\delta_3(X)| \nu_3(X)} (p_3)_*(\phi)(X),$$

où $(p_3)_*(\phi)(X) = \int_H \phi(h, X) dh$ pour $\phi \in \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$. L'application $(\tilde{p}_3)_*$ est surjective de $\mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ dans $\mathcal{D}((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$.

Proposition 3.4.1. *Pour $\phi \in \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$, on a*

$$\mathcal{M}_H((\pi_3)_*(\phi))(X) = \mathcal{M}_{N_3}((\tilde{p}_3)_*(\phi))(X).$$

Preuve : Soit $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$. Par le lemme 3.4.2, on a $Z_H(X) = Z_{N_3}(X)$. La preuve est ensuite identique à celle de la proposition 3.3.1 ■

Remarque 3.4.1. *Soit $F \in \mathcal{D}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$. Comme $N_3 = N_3^0 \cup \tilde{K}N_3^0$ et $Ad(\tilde{K})|_{\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}} = -Id|_{\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}}$, pour $X \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$, on a*

$$\int_{N_3/Z_H(X)} F(l \cdot X) dl = \int_{N_3^0/Z_H(X)} F(l \cdot X) dl + \int_{N_3^0/Z_H(X)} F(-l \cdot X) dl$$

Par ailleurs, grâce au lemme 3.4.2, en posant $X = \tau H_3 + X'$ avec $\tau \in \mathbb{R}$ et $X' \in [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$, on a

$$\int_{N_3^0/Z_H(X)} F(l \cdot X) dl = \int_{N_3^0/Z_{N_3^0}(X')} F(\tau H_3 + l \cdot X') dl.$$

Nous exprimons maintenant l'intégrale orbitale $\mathcal{M}_{N_3}(g)(\tau H_3 + X')$ de $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$, en terme d'une application moyenne $M_Q(\tilde{g}_\tau)$ définie dans le paragraphe 2.1 où $\tilde{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ dépend de g .

L'espace $[\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ par $i_1 \left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \right) = Y$. Le groupe N_3^0 est isomorphe à $GL(2, \mathbb{R})$ et pour $A \in GL(2, \mathbb{R})$, $Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, on a $A \cdot Y = i_1 \left(\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \right)$. De plus, la restriction de Q à $[\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$ est la forme quadratique N_3^0 -invariante donnée par $Q \left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \right) = -2\det(Y)$ pour $Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Notons q_3 la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par $q_3(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ et ψ_3 l'isomorphisme de \mathbb{R}^3 dans $[\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$ défini par

$$\psi_3(x, y, z) = \left(\begin{array}{cc|cc} & & x & y+z \\ & 0 & y-z & -x \\ \hline x & y+z & & \\ y-z & -x & & 0 \end{array} \right)$$

de telle sorte que $Q \circ \psi_3 = 2q_3$.

Lemme 3.4.3. *Pour tout $g \in \mathcal{D}([\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q})$ et pour tout $X \in ([\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q})^{reg}$, on a*

$$|\delta_3(X)| \int_{N_3^0/Z_{N_3^0}(X)} g(l \cdot X) dl = M_{q_3}(g \circ \psi_3) \left(\frac{Q}{2}(X) \right)$$

Preuve : Ce résultat s'obtient comme le lemme 3.3.2 en écrivant la formule d'intégration de Weyl pour la paire symétrique $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$. ■

Pour $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$ on définit la fonction \tilde{g} sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ par

$$\tilde{g}(\tau, u) = g(\tau H_3 + \psi_3(u))$$

Corollaire 3.4.1. *Soit $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$ et $X = \tau H_3 + X' \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})^{reg}$. On note $w = \frac{Q(X')}{2}$. On a alors*

$$\mathcal{M}_{N_3}(g)(X) = M_{q_3}(\tilde{g}_\tau + \tilde{g}_{-\tau})(w).$$

Preuve : Par la remarque 3.4.1, pour $X = \tau H_3 + X' \in (\mathbb{R}H_3 \oplus [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3]) \cap \mathfrak{q}^{reg}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{N_3}g(X) &= |\delta_3(X)| \int_{N_3^0/Z_H(X)} g(\tau H_3 + l \cdot X') dl \\ &\quad + |\delta_3(-X)| \int_{N_3^0/Z_H(X)} g(-\tau H_3 - l \cdot X') dl. \end{aligned}$$

Comme $Q(X') = Q(-X')$, le résultat découle du lemme précédent. ■

Corollaire 3.4.2. Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. Alors il existe une fonction $f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ paire par rapport à la première variable et à support contenu dans $\{(\tau, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3; 2\tau^2 - q_3(u) > 0\}$, telle que pour tout $(\tau, X') \in \mathbb{R} \times [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$ vérifiant $\tau H_3 + X' \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$, on ait

$$\mathcal{M}_H(f)(\tau H_3 + X') = M_{q_3}(f_1)_\tau(Q(X')/2).$$

Preuve : Comme l'application $(\pi_3)_*$ est surjective, il existe $\phi \in \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ telle que $f = (\pi_3)_*(\phi)$. On note $g = (\tilde{p}_3)_*(\phi)$ de sorte que $\mathcal{M}_H(f)(X) = \mathcal{M}_{N_3}(g)(X)$.

Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ par $f_1(\tau, u) = \tilde{g}(\tau, u) + \tilde{g}(-\tau, u)$. Comme $g \in \mathcal{D}((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, la fonction \tilde{g} est à support contenu dans $\{(\tau, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3; 2\tau^2 - q_3(u) > 0\}$. Par le corollaire précédent, on a $\mathcal{M}_H(f)(\tau H_3 + X') = M_{q_3}(f_1)_\tau(Q(X')/2)$ et f_1 vérifie les propriétés demandées. ■

Soit $(\tau, w) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ tel que $\tau^2 > w$. Par le lemme 1.3.1 et la remarque 1.3.1, il existe une unique H -orbite régulière $\mathcal{O} = H \cdot X(\tau, w)$ avec $X(\tau, w) = \tau H_3 + X' \in \mathfrak{q}^{reg} \cap (\mathbb{R}H_3 \oplus [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3])_+$ tel que $Q(X(\tau, w)) = 2(\tau^2 + w)$ et $S(X(\tau, w)) = (\tau^2 - w)^2$. Ainsi, pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on définit la fonction G_f sur $(\mathbb{R}^*)^2$ par

$$G_f(\tau, w) = \begin{cases} \mathcal{M}_H(f)(X(\tau, w)) & \text{si } \tau^2 > w \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par le corollaire 3.4.2, la fonction G_f est paire par rapport à τ .

Remarque 3.4.2. Pour $w > \tau^2 > 0$, on a immédiatement $H \cdot X(\tau, w) = H \cdot X(\sqrt{w}, \tau^2)$ et donc, dans ce cas, on obtient

$$\mathcal{M}_H(f)(X(\tau, w)) = G_f(\sqrt{w}, \tau^2).$$

On définit le sous-espace \mathcal{H}_Y^{pair} de \mathcal{H}_η^1 où $\eta(t) = Y(t)$ est la fonction d'Heaviside, par :

$$\mathcal{H}_Y^{pair} = \{(\tau, w) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto a(\tau, w) + Y(-w)|w|^{1/2}b(\tau, w);$$

$$a, b \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\}) \text{ paires par rapport à } \tau\}.$$

Théorème 3.4.1. 1. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on a $G_f \in \mathcal{H}_Y^{pair}$

2. L'application

$$\begin{cases} \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) & \rightarrow \mathcal{H}_Y^{pair} \\ f & \mapsto G_f \end{cases}$$

est surjective et continue.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. Montrons tout d'abord que G_f est dans \mathcal{H}_Y^{pair} .

Grâce au corollaire 3.4.2, il existe $f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ paire par rapport à la première variable et à support contenu dans $\{(\tau, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3; 2\tau^2 - q_3(u) > 0\}$, telle que pour $X = \tau H_3 + X' \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+^{reg}$ avec $\tau \in \mathbb{R}$ et $X' \in [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3] \cap \mathfrak{q}$ vérifiant $Q(X')/2 = w$, on ait

$$G_f(\tau, w) = \mathcal{M}_H(f)(X) = M_{q_3}(f_1)_\tau(w).$$

Grâce au théorème 2.1.3 et compte-tenu du support de f_1 , on obtient alors $G_f \in \mathcal{H}_Y^{pair}$.

Montrons maintenant la surjectivité de l'application. Soit $G \in \mathcal{H}_Y^{pair}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\tau^2 < \varepsilon \text{ ou } \tau^2 - w < \varepsilon \implies G(\tau, w) = 0.$$

Grâce au théorème 2.1.3, il existe $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ tel que pour $\tau, w \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$G(\tau, w) = M_{q_3}(g_\tau)(w) = M_{q_3}\left(\frac{1}{2}g_\tau\right)(w) + M_{q_3}\left(\frac{1}{2}g_{-\tau}\right)(w).$$

Grâce au corollaire 3.4.1, la fonction $g_0 \in \mathcal{D}(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})$ définie par $g_0(\tau H_3 + X') = g(\tau, \psi_3^{-1}(X')) + g(-\tau, \psi_3^{-1}(X'))$ vérifie

$$\mathcal{M}_{N_3}(g_0)(\tau H_3 + X') = G(\tau, Q(X')/2).$$

Soit χ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ nulle sur $] -\infty; \frac{\varepsilon}{2}]$ et égale à 1 sur $[\varepsilon; +\infty[$. Pour $X = \tau H_3 + X' \in (\mathbb{R}H_3 + [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3]) \cap \mathfrak{q}$, on pose $\phi_1(X) = \tau^2$ et $\phi_2(X) = \tau^2 - Q(X')/2$. Soit θ la fonction définie pour $X = \tau H_3 + X' \in (\mathbb{R}H_3 + [\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_3]) \cap \mathfrak{q}$ par

$$\theta(X) = \phi_1(X)\phi_2(X) = \chi(\tau^2)\chi(\tau^2 - Q(X')/2).$$

Cette fonction est N_3 -invariante et pour $\tau^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ou $\tau^2 - Q(X')/2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$, on a $\theta(X) = 0$ et pour $\tau^2 \geq \varepsilon$ et $\tau^2 - Q(X')/2 \geq \varepsilon$, on a $\theta(X) = 1$. Ainsi θg_0 est à support dans $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ et vérifie pour $Q(X')/2 = w$ la relation

$$\mathcal{M}_{N_3}(\theta g_0)(X) = \chi(\tau^2)\chi(\tau^2 - w)G(\tau, w) = G(\tau, w).$$

Par surjectivité de l'application $(\tilde{p}_3)_*$, il existe $\phi \in \mathcal{D}(H \times (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ telle que $\theta g_0 = (\tilde{p}_3)_*(\phi)$ et par la proposition 3.4.1, on a $\mathcal{M}_H((\pi_3)_*(\phi))(X) = \mathcal{M}_{N_3}((\tilde{p}_3)_*(\phi))(X) = G(\tau, w)$, ce qui achève la preuve. ■

4 Opérateurs différentiels et solutions propres

La forme H -invariante et non dégénérée $\omega(X, X') = \frac{1}{2}tr(XX')$ induit un isomorphisme de $S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^{H_{\mathbb{C}}}$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}[Q, S]$. Dans cette partie, nous déterminons les fonctions H -invariantes et analytiques sur \mathfrak{q}^{reg} solutions du système

$$(E_{\chi})(\mathfrak{q}^{reg}) \begin{cases} \partial(Q)\Phi = \chi(Q)\Phi \\ \partial(S)\Phi = \chi(S)\Phi \end{cases},$$

où χ est un caractère de $\mathbb{C}[Q, S] = \mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$. Comme $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\mathfrak{a}_{+,+}]^{W_H(\mathfrak{a}_{+,+})}$, un tel caractère est déterminé par $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ avec $\chi(Q) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\chi(S) = \lambda_1\lambda_2$ et il est dit régulier si $\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$.

Dans toute la suite, on fixe un caractère régulier χ associé à $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan. Nous rappelons que la partie radiale sur \mathfrak{a} d'un opérateur différentiel D défini sur \mathfrak{q}^{reg} , que l'on notera $\Delta_{\mathfrak{a}}(D)$, est l'opérateur différentiel défini sur \mathfrak{a}^{reg} vérifiant pour toute fonction f de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{q})^H$, la relation

$$\Delta_{\mathfrak{a}}(D)(f|_{\mathfrak{a}^{reg}}) = (Df)|_{\mathfrak{a}^{reg}}.$$

Ainsi, la fonction Φ est solution de $(E_{\chi})(\mathfrak{q}^{reg})$ si et seulement si elle satisfait sur \mathfrak{a}^{reg} le système

$$(E_{\chi})(\mathfrak{a}^{reg}) \begin{cases} \Delta_{\mathfrak{a}}(\partial Q)\Phi = (\lambda_1 + \lambda_2)\Phi \\ \Delta_{\mathfrak{a}}(\partial S)\Phi = \lambda_1\lambda_2\Phi \end{cases}.$$

Dans cette partie, nous allons déterminer, pour tout sous-espace de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{q} , les parties radiales de $\partial(Q)$ et $\partial(S)$. Nous déterminerons ensuite les solutions sur \mathfrak{a}^{reg} du système $(E_{\chi})(\mathfrak{a}^{reg})$.

4.1 Parties radiales

Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan. Pour $\xi \in \mathfrak{a}$ et k une fonction $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ -invariante de $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ dans \mathbb{C} , on note $T_{\xi}(k)$ l'opérateur de Dunkl défini par

$$T_{\xi}(k) = \partial_{\xi} + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} k_{\alpha} \alpha(\xi) \frac{1 - r_{\alpha}}{\alpha},$$

avec $r_{\alpha} = id_{\mathfrak{a}} - \frac{2\alpha}{\alpha(h_{\alpha})}h_{\alpha}$. L'opérateur $T_{\xi}(k)$ agit sur $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]$ et sur $\mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{a})$.

Nous rappelons tout d'abord quelques propriétés remarquables de ces opérateurs de Dunkl dont les preuves sont précisées dans [3] et [9].

Pour $\xi, \xi' \in \mathfrak{a}$, on a $[T_{\xi}(k), T_{\xi'}(k)] = 0$. Ainsi l'application $\xi \mapsto T_{\xi}(k)$ de \mathfrak{a} dans l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{a}^{reg})$ s'étend en un homomorphisme injectif de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ dans l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{a}^{reg})$. On note $T_p(k)$ l'image de $p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ par cette application.

Lorsque $p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$, l'opérateur $T_p(k)$ est un opérateur différentiel sur l'espace des fonctions $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ -invariantes sur \mathfrak{a} . On note $D_p(k)$ la restriction de $T_p(k)$ à l'espace des fonctions $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ -invariantes sur \mathfrak{a} .

Soit $Res_{\mathfrak{a}}$ l'homomorphisme de restriction de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}]^{H_{\mathbb{C}}}$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$ donné par $P \mapsto P|_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}}$. La restriction de ω à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ est non dégénérée, donc elle induit un isomorphisme de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$ et on notera également $Res_{\mathfrak{a}}$ l'homomorphisme de restriction de $S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})^{H_{\mathbb{C}}}$ dans $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$ que l'on déduit.

Théorème 4.1.1. ([19] paragraphe 1.1) Soit $P \in S(\mathfrak{q})^H$ et k la fonction définie sur $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ par $k_{\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{2}$. Alors l'action de $\Delta_{\mathfrak{a}}(\partial P)$ coïncide avec celle de $D_{Res_{\mathfrak{a}}(P)}(k)$ sur l'espace des fonctions $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ -invariantes sur \mathfrak{a} .

Dans toute la suite, nous considérons la fonction k définie par $k_{\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{2}$, pour α parcourant $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. On pose

$$I(k) = \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha^{2k_{\alpha}} = \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^+} \alpha^{m_{\alpha}}.$$

Remarque 4.1.1. On a $|I(k - \frac{1}{2})| = |\delta|$ et $|I(k)| = \Pi$

Théorème 4.1.2. ([14] proposition 3.9(1)). Pour $p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}$, on a

$$D_p(1 - k) = I(k - \frac{1}{2}) \circ D_p(k) \circ I(\frac{1}{2} - k) = \delta \circ D_p(k) \circ \delta^{-1}.$$

Preuve : Le résultat d'Opdam donne la première égalité, la deuxième en découle car les fonctions $\frac{\delta}{|\delta|}$ et $\frac{I(k - \frac{1}{2})}{|I(k - \frac{1}{2})|}$ sont localement constantes sur \mathfrak{a}^{reg} . ■

Pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, on pose

$$L_{\alpha} := \frac{1}{4\alpha} \partial h_{\alpha} (\alpha \partial h_{\alpha}) = \frac{1}{4} \partial h_{\alpha}^2 + \frac{1}{\alpha} \partial h_{\alpha}.$$

Nous rappelons que l'on note α_1 et α_2 les deux racines positives de multiplicité un de \mathfrak{a} .

Proposition 4.1.1. On a

$$\Delta_{\mathfrak{a}}(\partial Q) = \delta^{-1} \circ (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}) \circ \delta = I(1/2 - k) \circ (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}) \circ I(k - 1/2)$$

$$\Delta_{\mathfrak{a}}(\partial S) = \delta^{-1} \circ (L_{\alpha_1} L_{\alpha_2}) \circ \delta = I(1/2 - k) \circ (L_{\alpha_1} L_{\alpha_2}) \circ I(k - 1/2).$$

Preuve : La première assertion est due à Dunkl ([3] et [9] théorème 1.6) et s'obtient par un simple calcul que nous reprenons ci-dessous pour obtenir la deuxième assertion.

Pour $P \in S(\mathfrak{q})^H$, on note $p = Res_{\mathfrak{a}}(P)$. Grâce aux théorèmes précédents, sur l'espace des fonctions $W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ -invariantes sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, on a les égalités suivantes :

$$\Delta_{\mathfrak{a}}(\partial P) = \delta^{-1} \circ D_p(1-k) \circ \delta = I\left(\frac{1}{2} - k\right) \circ D_p(1-k) \circ I\left(k - \frac{1}{2}\right).$$

Calculons $D_p(1-k)$ pour $P = Q$ et $P = S$. En utilisant l'isomorphisme $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ induit par ω , on a $Res_{\mathfrak{a}}(Q) = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{4} = \frac{h_{\alpha_1}^2 + h_{\alpha_2}^2}{4}$ et $Res_{\mathfrak{a}}(S) = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{16} = \frac{h_{\alpha_1}^2 h_{\alpha_2}^2}{16}$.

Par définition, on a $T_{\xi}(1-k) = \partial_{\xi} + \frac{1}{2}\alpha_1(\xi)\frac{1-r_{\alpha_1}}{\alpha_1} + \frac{1}{2}\alpha_2(\xi)\frac{1-r_{\alpha_2}}{\alpha_2}$. Comme les racines α_1 et α_2 sont orthogonales et $\alpha_i(h_{\alpha_i}) = Q(h_{\alpha_i}) = 4$, pour $i \in \{1, 2\}$, on obtient $T_{h_{\alpha_i}}(1-k) = \partial h_{\alpha_i} + 2\frac{1-r_{\alpha_i}}{\alpha_i}$, et par suite

$$T_{h_{\alpha_i}}(1-k) = \partial h_{\alpha_i}^2 + 2\partial h_{\alpha_i} \circ \frac{1-r_{\alpha_i}}{\alpha_i} + 2\frac{1-r_{\alpha_i}}{\alpha_i} \circ \partial h_{\alpha_i} + 4\left(\frac{1-r_{\alpha_i}}{\alpha_i}\right)^2.$$

Les relations $r_{\alpha_i} \circ \partial h_{\alpha_i} = \partial(r_{\alpha_i}(h_{\alpha_i})) \circ r_{\alpha_i} = -\partial h_{\alpha_i} \circ r_{\alpha_i}$ et $\left(\frac{1-r_{\alpha_i}}{\alpha_i}\right)^2 = 0$, donnent finalement

$$T_{h_{\alpha_i}}(1-k) = \partial h_{\alpha_i}^2 + \frac{2}{\alpha_i}\partial h_{\alpha_i} + \frac{2}{\alpha_i}\partial h_{\alpha_i} \circ r_{\alpha_i} + 2\partial h_{\alpha_i} \circ \frac{1-r_{\alpha_i}}{\alpha_i}.$$

On obtient donc les égalités suivantes :

$$D_{h_{\alpha_1}^2 + h_{\alpha_2}^2}(1-k) = \partial h_{\alpha_1}^2 + \frac{4}{\alpha_1}\partial h_{\alpha_1} + \partial h_{\alpha_2}^2 + \frac{4}{\alpha_2}\partial h_{\alpha_2} = 4(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}).$$

et

$$\begin{aligned} D_{h_{\alpha_1}^2 h_{\alpha_2}^2}(1-k) &= T_{h_{\alpha_1}}(1-k)T_{h_{\alpha_2}}(1-k)|_{\mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}} \\ &= 4T_{h_{\alpha_1}}(1-k)L_{\alpha_2}|_{\mathbb{C}[\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}]^{W_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})}} = 16L_{\alpha_1}L_{\alpha_2} = 16L_{\alpha_2}L_{\alpha_1}, \end{aligned}$$

puisque les racines α_1 et α_2 sont orthogonales. D'où le résultat. \blacksquare

4.2 Solutions du système $E_{\chi}(\mathfrak{a}^{reg})$

Soit Φ une fonction H -invariante et analytique sur \mathfrak{q}^{reg} solution du système $(E_{\chi})(\mathfrak{q}^{reg})$. Par H -invariance, la fonction Φ est uniquement déterminée par ses restrictions à \mathfrak{a}^{reg} pour $\mathfrak{a} \in \langle car(\mathfrak{q}) \rangle$ et par le théorème 4.1.1 et la proposition 4.1.1, pour tout $\mathfrak{a} \in \langle car(\mathfrak{q}) \rangle$, la fonction H -invariante $(|\delta|\Phi)|_{\mathfrak{a}^{reg}}$ est solution du système suivant :

$$(S_{\mathfrak{a}^{reg}, \chi}) \left\{ \begin{array}{l} (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2})\tilde{\Psi} = (\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{\Psi} \\ L_{\alpha_1}L_{\alpha_2}\tilde{\Psi} = \lambda_1\lambda_2\tilde{\Psi} \end{array} \right. \quad \text{sur } \mathfrak{a}^{reg}.$$

Pour $j = 1, 2$, précisons l'expression des opérateurs L_{α_j} en terme des coordonnées sur $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$. Soit $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\epsilon_1, \epsilon_2}$ avec $\epsilon_j = \pm$.

La racine α_j est réelle si et seulement si $\epsilon_j = +$. Dans ce cas, on a $\alpha_j(X_{u_1 u_2}^{\epsilon_1 \epsilon_2}) = 2u_j$, $\partial h_{\alpha_j} = 2 \frac{\partial}{\partial u_j}$ et $L_{\alpha_j} = \frac{\partial^2}{\partial u_j^2} + \frac{1}{u_j} \frac{\partial}{\partial u_j}$.

La racine α_j est imaginaire si et seulement si $\epsilon_j = -$. Dans ce cas, on a $\alpha_j(X_{u_1 u_2}^{\epsilon_1 \epsilon_2}) = 2iu_j$, $\partial h_{\alpha_j} = -2i \frac{\partial}{\partial u_j}$ et $L_{\alpha_j} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial u_j^2} + \frac{1}{u_j} \frac{\partial}{\partial u_j}\right)$.

Pour $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2$ et $\alpha = 2(\tau \pm i\theta)$, on a $\partial h_\alpha = \frac{\partial}{\partial \tau} \mp i \frac{\partial}{\partial \theta}$ et $L_\alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \mp i \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2(\tau \pm i\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \mp i \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$.

On introduit l'opérateur différentiel de Bessel d'une variable complexe L_c et son analogue réel L

$$L_c = 4 \left(z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{et} \quad L = 4 \left(t \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} \right).$$

L'opérateur L correspond à la partie radiale de l'opérateur de Laplace pour la paire symétrique $(\mathfrak{so}(2, 1), \mathfrak{so}(1, 1))$ et s'obtient à partir de $\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \right)$ par le changement de variable $t = u^2$.

L'équation $L_c y = \lambda y$ est de type Fuchs en 0 et ses solutions s'expriment à l'aide des fonctions de Bessel. Plus précisément, on rappelle le résultat suivant :

Proposition 4.2.1. (*[13] paragraphe 16.32 et [4] appendice A (4)*) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose

$$\Phi_\lambda(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda z)^n}{4^n (n!)^2} \quad \text{et} \quad w_\lambda(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a(n)(\lambda z)^n}{4^n (n!)^2}, \quad \text{où } a(x) = -2 \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}.$$

1. Un système fondamental de solutions de $L_c y = \lambda y$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ est donnée par la fonction analytique complexe Φ_λ et la fonction $W_\lambda(z) = w_\lambda(z) + \log(z) \Phi_\lambda(z)$ où \log désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$.
2. Un système fondamental de solutions de $Ly = \lambda y$ est donnée par la fonction analytique réelle $\Phi_\lambda(t)$ et la fonction $W_\lambda^r(t) = w_\lambda(t) + \log |t| \Phi_\lambda(t)$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on pose

$$\text{Sol}(L, \lambda) = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*, \mathbb{C}); Ly = \lambda y\}$$

et

$$\text{Sol}(L_c, \lambda) = \{y : \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}, \text{analytique}; L_c y = \lambda y\}.$$

Nous allons exprimer les solutions du système $(S_{\mathfrak{a}^{reg}, \chi})$ pour $\mathfrak{a} \in \langle \text{car}(\mathfrak{q}) \rangle$ en terme des fonctions Φ_λ et W_λ données dans la proposition précédente.

Considérons tout d'abord le cas $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_{+,-}, \mathfrak{a}_{-,-}\}$. Par H -invariance des fonctions considérées, il est naturel d'introduire, pour $i \in \{1, 2\}$, les opérateurs différentiels

$$L_i := 4 \left(t_i \frac{\partial^2}{\partial t_i^2} + \frac{\partial}{\partial t_i} \right).$$

La description précédente des opérateurs L_{α_i} permet d'obtenir le lemme suivant :

Lemme 4.2.1. *Soit $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_{+,-}, \mathfrak{a}_{-,-}\}$. Si $\tilde{\Psi}$ est une solution analytique $W_H(\mathfrak{a})$ -invariante de $(S_{\mathfrak{a}^{reg}, \chi})$ alors il existe une fonction Ψ analytique sur $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 / (t_1 - t_2)t_1 t_2 \neq 0\}$, telle que :*

1. $\Psi(t_1, t_2) = \Psi(t_2, t_1)$,
2.
$$\begin{cases} (L_1 + L_2)\Psi(t_1, t_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi(t_1, t_2) \\ L_1 L_2 \Psi(t_1, t_2) = \lambda_1 \lambda_2 \Psi(t_1, t_2) \end{cases},$$
3. *Pour tout $X \in \mathfrak{a}^{reg}$, alors $\tilde{\Psi}(X) = \Psi(u(X), v(X))$ où $\{u(X), v(X)\}$ caractérise la H -orbite de X (lemme 1.3.1).*

Proposition 4.2.2. *Les solutions Ψ de classe \mathcal{C}^2 sur $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 / (t_1 - t_2)t_1 t_2 \neq 0\}$ du système*

$$\begin{cases} [(L_1 + L_2)\Psi](t_1, t_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi(t_1, t_2) \\ L_1 L_2 \Psi(t_1, t_2) = \lambda_1 \lambda_2 \Psi(t_1, t_2) \end{cases}.$$

sont sur chaque composante connexe de $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 / (t_1 - t_2)t_1 t_2 \neq 0\}$ des combinaisons linéaires des fonctions

$$(t_1, t_2) \mapsto A(t_1)B(t_2) \quad \text{et} \quad (t_1, t_2) \mapsto A(t_2)B(t_1),$$

où A et B parcourent respectivement $Sol(L, \lambda_1)$ et $Sol(L, \lambda_2)$.

Preuve : Soit Ψ une solution du système considéré. Pour $i \in \{1, 2\}$, on a donc $(L_i^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)L_i + \lambda_1 \lambda_2 id)\Psi = 0$, et par suite,

$$\Psi \in \ker(L_i^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)L_i + \lambda_1 \lambda_2 id) = \ker(L_i - \lambda_1 id) \oplus \ker(L_i - \lambda_2 id).$$

Par la proposition 4.2.1 (2.) appliquée à L_1 , il existe une famille $(g_j)_{j \in \{1, \dots, 4\}}$ de fonctions définies sur \mathbb{R} telles que

$$\Psi(t_1, t_2) = g_1(t_2)\Phi_{\lambda_1}(t_1) + g_2(t_2)W_{\lambda_1}^r(t_1) + g_3(t_2)\Phi_{\lambda_2}(t_1) + g_4(t_2)W_{\lambda_2}^r(t_1).$$

En inversant la matrice correspondant au wronskien de $t_1 \mapsto \Phi_{\lambda_i}(t_1)$ et $t_1 \mapsto W_{\lambda_i}^r(t_1)$, pour $i \in \{1, 2\}$, on en déduit que les fonctions g_1, g_2, g_3 et g_4 sont de classe \mathcal{C}^2 sur $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 / (t_1 - t_2)t_1 t_2 \neq 0\}$.

En reprenant le système initial et tenant compte la liberté des fonctions $t_1 \mapsto \Phi_{\lambda_i}(t_1)$ et $t_1 \mapsto W_{\lambda_i}^r(t_1)$, pour $i \in \{1, 2\}$, on en déduit que g_1 et g_2 sont dans $Sol(L, \lambda_2)$ et que g_3 et g_4 sont dans $Sol(L, \lambda_1)$. ■

Etudions maintenant le cas particulier de \mathfrak{a}_2 .

$$\text{Un élément de } \mathfrak{a}_2 \text{ s'écrit } X_{\tau, \theta} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \tau & -\theta \\ \hline \tau & \theta & \tau \\ \theta & \tau & 0 \end{array} \right) \text{ avec } (\tau, \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

On note \mathfrak{a}_2^+ la chambre de Weyl de \mathfrak{a}_2^{reg} formée des $X_{\tau, \theta}$ tels que $\tau > 0$ et $\theta > 0$. Ainsi une fonction $W_H(\mathfrak{a}_2)$ -invariante solution de $S_{\mathfrak{a}_2^{reg}, \chi}$ est uniquement déterminée par sa restriction à \mathfrak{a}_2^+ et vérifie le même système sur \mathfrak{a}_2^+ que l'on notera $S_{\mathfrak{a}_2^+, \chi}$.

$$\text{Pour } i = 1, 2, \text{ on note } L_{c,i} := 4 \left(z_i \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} + \frac{\partial}{\partial z_i} \right).$$

Proposition 4.2.3. *Si $\tilde{\Psi}$ est une solution analytique de $(S_{\mathfrak{a}_2^+, \chi})$ alors il existe un ouvert connexe U de \mathbb{C}^2 contenant $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_1 = \bar{z}_2 \text{ et } \text{Im}(z_1) > 0\}$ et une fonction $\Psi_c : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique sur U telle que :*

1. $\begin{cases} [(L_{c,1} + L_{c,2})\Psi_c](z_1, z_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_c(z_1, z_2) \\ L_{c,1}L_{c,2}\Psi_c(z_1, z_2) = \lambda_1\lambda_2\Psi_c(z_1, z_2) \end{cases} \quad \text{sur } U,$
2. *Pour $\tau > 0$ et $\theta > 0$ alors on a $\tilde{\Psi}(X_{\tau, \theta}) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$.*

Preuve : On note $D_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$. Par le lemme 1.3.1, pour tout $(x, y) \in D_+$, il existe une unique H -orbite \mathcal{O} de \mathfrak{q}^{reg} telle que $\mathcal{O} \cap \mathfrak{a}_2 \neq \emptyset$ et pour tout $X \in \mathcal{O}$ alors $\{u(X), v(X)\} = \{x + iy, x - iy\}$.

Ainsi l'application γ définie sur \mathfrak{a}_2^+ par $\gamma(X_{\tau, \theta}) = (\tau^2 - \theta^2, 2\theta\tau)$ est un difféomorphisme analytique de \mathfrak{a}_2^+ dans D_+ d'inverse analytique donné par $\gamma^{-1}(x, y) = X_{\tau, \theta}$ avec $\tau = \text{Re}(\sqrt{x + iy})$ et $\theta = \text{Im}(\sqrt{x + iy})$ où la fonction racine $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log(z)}$ est définie sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$.

On définit la fonction Ψ_0 sur D_+ par $\Psi_0(x, y) = \tilde{\Psi} \circ \gamma^{-1}(x, y)$. Cette fonction est analytique réelle sur D_+ et, en notant $L_0 = (x + iy) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, elle satisfait le système suivant sur D_+ :

$$(S_0(D_+)) \begin{cases} (L_0 + \overline{L_0})\Psi_0(x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_0(x, y) \\ L_0\overline{L_0}\Psi_0(x, y) = \lambda_1\lambda_2\Psi_0(x, y) \end{cases}.$$

Comme la fonction Ψ_0 est développable en série entière au voisinage de tout point de D_+ , pour tout $(x_0, y_0) \in D_+$, il existe une famille $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ de nombres complexes et $R > 0$ tels que :

a) la famille $(a_{m,n}r^{m+n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable pour tout $r < R$

b) pour $|x - x_0| < R$ et $|y - y_0| < R$ alors $\Psi_0(x, y) = \sum_{m, n \geq 0} a_{m, n} (x - x_0)^m (y - y_0)^n$, cette expression étant indépendante de l'ordre de sommation des termes ([12] théorème 2.2.6).

Par suite, il existe une famille $(b_{m, n})_{(m, n) \in \mathbb{N}^2}$ de nombres complexes telle que, pour tout $r < R$, la famille $(b_{m, n} r^{m+n})_{(m, n) \in \mathbb{N}^2}$ soit sommable et, en posant $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$, pour $|z - z_0| < R$, on a

$$\Psi_0(x, y) = \sum_{m, n \geq 0} b_{m, n} (z - z_0)^m (\overline{z - z_0})^n.$$

Ceci permet de définir la fonction Ψ_c sur le disque de centre $(z_0, \overline{z_0})$ et de rayon R dans \mathbb{C}^2 en posant

$$\Psi_c(z_1, z_2) = \sum_{m, n \geq 0} b_{m, n} (z_1 - z_0)^m (z_2 - \overline{z_0})^n.$$

Cette construction est licite au voisinage de tout point $(z_0, \overline{z_0})$ tels que $(\operatorname{Re}(z_0), \operatorname{Im}(z_0)) \in D_+$. Ainsi, par prolongement analytique ([12] théorème 2.2.6 et remarque qui suit le théorème 2.2.7), il existe un ouvert connexe U de \mathbb{C}^2 contenant $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_1 = \bar{z}_2 \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) > 0\}$ et une fonction $\Psi_c : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytique sur U telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, l'on ait

$$\Psi_c(x + iy, x - iy) = \Psi_0(x, y) = \tilde{\Psi} \circ \gamma^{-1}(x, y),$$

ce qui s'écrit encore $\tilde{\Psi}(X_{\tau, \theta}) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$, pour $\tau > 0$ et $\theta > 0$.

La fonction Ψ_0 satisfait le système $(S_0(D_+))$ et donc, par construction de Ψ_c , pour $(x, y) \in D_+$, on a les relations

$$\begin{aligned} [(L_{c,1} + L_{c,2})\Psi_c](x + iy, x - iy) &= (L_0 + \overline{L_0})\Psi_0(x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_c(x + iy, x - iy) \\ \text{et } [(L_{c,1}L_{c,2})\Psi_c](x + iy, x - iy) &= (L_0\overline{L_0})\Psi_0(x, y) = (\lambda_1\lambda_2)\Psi_c(x + iy, x - iy). \end{aligned}$$

Maintenant, si R est une fonction analytique sur U alors, pour $m, n \in \mathbb{N}$ et $(z, \bar{z}) \in U$, on a

$$\left(\frac{\partial^m}{\partial z_1^m} \frac{\partial^n}{\partial z_2^n} R \right) (z, \bar{z}) = \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} (z \rightarrow R(z, \bar{z}))$$

Ainsi, par le théorème 2.2.6 de [12], si $R(z, \bar{z}) = 0$ pour tout $(z, \bar{z}) \in U$, alors $R = 0$ sur U . On obtient donc que Ψ_c est solution du système

$$\begin{cases} [(L_{c,1} + L_{c,2})\Psi_c](z_1, z_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_c(z_1, z_2) \\ L_{c,1}L_{c,2}\Psi_c(z_1, z_2) = \lambda_1\lambda_2\Psi_c(z_1, z_2) \end{cases}$$

sur U . Ceci achève la preuve du lemme. ■

Proposition 4.2.4. *Les solutions Ψ_c analytiques sur U du système*

$$\begin{cases} (L_{c,1} + L_{c,2})\Psi_c(z_1, z_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_c(z_1, z_2) \\ (L_{c,1}L_{c,2})\Psi_c(z_1, z_2) = (\lambda_1\lambda_2)\Psi_c(z_1, z_2) \end{cases}$$

sont des combinaisons linéaires des fonctions

$$(z_1, z_2) \mapsto A(z_1)B(z_2) \quad \text{et} \quad (z_1, z_2) \mapsto A(z_2)B(z_1),$$

où A et B parcourent respectivement $Sol(L_c, \lambda_1)$ et $Sol(L_c, \lambda_2)$.

La preuve de cette proposition est identique à celle de la proposition 4.2.2.

4.2.1 Actions sur les intégrales orbitales

Nous concluons cette partie en donnant l'action des opérateurs différentiels sur les intégrales orbitales.

Lemme 4.2.2. *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$ et $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{q})$. On note toujours α_1 et α_2 les racines positives de multiplicité 1 de \mathfrak{a} . On a alors :*

$$(\mathcal{M}_H(\partial(Q)f)|\mathfrak{a}^{reg} = (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2})(\mathcal{M}_H(f)|\mathfrak{a}^{reg})$$

et

$$(\mathcal{M}_H(\partial(S)f)|\mathfrak{a}^{reg} = (L_{\alpha_1}L_{\alpha_2})(\mathcal{M}_H(f)|\mathfrak{a}^{reg}).$$

Preuve : Ceci découle immédiatement de la normalisation de $\mathcal{M}_H(f)$ et de la proposition 4.1.1 ■

On reprend les notations de la définition 3.1.2, c'est-à-dire si $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$ alors $\mathcal{M}_H(f)(X) = \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(u(X), v(X))$ et si $X = X_{\tau, \theta} \in \mathfrak{a}_2$ alors $\mathcal{M}_H(f)(X_{\tau, \theta}) = \mathcal{M}f_2(\tau, \theta)$. On note $\alpha = 2(\tau + i\theta)$ et $\bar{\alpha}$ les racines positives de multiplicité 1 de \mathfrak{a}_2 . On obtient alors :

Corollaire 4.2.1. *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$ alors on a*

$$\mathcal{M}(\partial(Q)f)_{\mathfrak{m}} = (L_1 + L_2)\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(\partial(S)f)_{\mathfrak{m}} = L_1L_2\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}$$

et

$$\mathcal{M}(\partial(Q)f)_2 = (L_{\alpha} + L_{\bar{\alpha}})\mathcal{M}f_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(\partial(S)f)_2 = L_{\alpha}L_{\bar{\alpha}}\mathcal{M}f_2.$$

5 Distributions propres invariantes de $L_{loc}^1(\mathcal{U})^H$ et perspectives sur $L_{loc}^1(\mathfrak{q})^H$

On note \mathcal{N} l'ensemble des éléments nilpotents de \mathfrak{q} et on pose $\mathcal{U} = \mathfrak{q} - \mathcal{N}$.

Le but de cette partie est de décrire l'ensemble des distributions invariantes sur \mathcal{U} , propres pour un caractère régulier χ de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$ fixé, données par une fonction Φ localement intégrable H -invariante sur \mathcal{U} .

On rappelle que pour T une distribution H -invariante propre sur \mathcal{U} solution du système

$$(E_\chi) \begin{cases} \partial(Q)T = \chi(Q)T \\ \partial(S)T = \chi(S)T \end{cases}.$$

alors la restriction de T à l'ensemble $\mathcal{U}^{reg} = \mathfrak{q}^{reg}$ est une fonction analytique ([17] théorème 5.3(i) de).

Nous allons décrire les conditions nécessaires et suffisantes sur $\Phi \in L_{loc}^1(\mathcal{U})^H$ satisfaisant le système $(E_\chi)(\mathfrak{q}^{reg})$ pour que la distribution T_Φ définie sur $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ par $\langle T_\Phi, f \rangle = \int_{\mathfrak{q}} \Phi(X)f(X)dX$ soit propre invariante sur \mathcal{U} .

Par hypothèse sur Φ , pour $P \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$ et $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, on a $\langle T_{\partial(P)\Phi}, f \rangle = \chi(P)\langle T_\Phi, f \rangle$ ainsi T_Φ est propre sur \mathcal{U} pour le caractère χ si et seulement si pour tout $P \in \mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$ et $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, on a

$$\int_{\mathfrak{q}} [(\partial(P)\Phi)f - \Phi(\partial(P)f)](X)dX = 0$$

La formule d'intégration de Weyl permet un travail sur chaque sous-espace de Cartan de $< car(\mathfrak{q}) >$. Compte-tenu du comportement des intégrales orbitales au voisinage des points semi-réguliers obtenu dans la partie 4 et de la description de $(|\delta|\Phi)|_{a_{reg}}$ (voir le lemme 4.2.1 et les propositions 4.2.2, 4.2.3 et 4.2.4), une intégration par parties sur chaque sous-espace de Cartan conduira aux conditions voulues sur Φ . Ces conditions sont analogues aux conditions de recollement obtenues dans le cas des algèbres réductives par Harish-Chandra et T. Hiraï ([7] et [10]) et de celles de J. Faraut obtenues pour un hyperboloïde à une nappe [6].

Elles traduisent le comportement de Φ au voisinage des points semi-réguliers. Grâce à l'application ϖ définie dans le paragraphe 1.2 qui renverse l'ordre d'Hiraï et la H -invariance des fonctions considérées, on ramène l'étude de Φ au voisinage des points de $\mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_{+,-}$ et $\mathfrak{a}_{+,+} \cap \mathfrak{a}_2$. Tout comme pour l'étude des intégrales orbitales, ces deux cas nécessitent une méthode spécifique.

5.1 Voisinages invariants des éléments semi-réguliers

On rappelle que ϖ désigne l'isomorphisme H -équivariant de \mathfrak{q} donné par $\varpi \left(\begin{smallmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & Y \\ -Z & 0 \end{smallmatrix} \right)$. Cet isomorphisme renverse l'ordre d'Hirai sur $\text{car}(\mathfrak{q})$. Par l'étude du paragraphe 1.4, tout élément semi-régulier appartient à $H \cdot {}^\lambda \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, ou à $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ ou à $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. Par l'étude de la partie 3, ces ensembles sont ouverts puisqu'image d'un ouvert par une application submersive.

On rappelle que les polynômes Q , S et S_0 sont donnés par $Q(X) = \frac{1}{2} \text{tr}(X^2)$, $S(X) = \det(X)$ et $S_0 = Q^2 - 4S$.

Lemme 5.1.1. *Nous avons :*

1.

$$H \cdot {}^\lambda \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{q}, S_0(X) > 0\}$$

2.

$$H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ = H \cdot {}^\lambda \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{q}, S(X) > 0, Q(X) > -2\sqrt{|S(X)|}\}$$

3.

$$H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) = \{X \in \mathfrak{q}, S(X) > 0, Q(X) < 2\sqrt{|S(X)|}\}.$$

4.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= H \cdot {}^\lambda \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \cup H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \cup H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) \\ &= \{X \in \mathfrak{q}, Q(X) \neq 0 \text{ ou } S_0(X) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Preuve : Soit $X \in \mathfrak{q}$ et soit $X = X_s + X_n$ sa décomposition de Jordan. En particulier $[X_s, X_n] = 0$ et donc $X^2 = X_s^2 + X_n(X_n + 2X_s)$ où $X_n(X_n + 2X_s)$ est nilpotent et commute à X_s^2 . On obtient donc $Q(X) = Q(X_s)$. Il est immédiat que $S(X) = S(X_s)$ et par suite $S_0(X) = S_0(X_s)$.

Par ailleurs, par la remarque 1.3.1, on a $S_0(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) \subset \mathbb{R}_+$ et $S_0(\mathfrak{a}_2) \subset \mathbb{R}_-$, le polynôme S prend des valeurs positives sur $\mathfrak{a}_{+,+}$, $\mathfrak{a}_{-,-}$ et \mathfrak{a}_2 et des valeurs négatives sur $\mathfrak{a}_{+,-}$, le polynôme Q prend des valeurs positives sur $\mathfrak{a}_{+,+}$ et négatives sur $\mathfrak{a}_{-,-}$.

1. L'inclusion $H \cdot {}^\lambda \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \subset \{X \in \mathfrak{q}, S_0(X) > 0\}$ est immédiate.

Soit X dans \mathfrak{q} tel que $S_0(X) > 0$ et soit $X = X_s + X_n$ sa décomposition de Jordan. Puisque $S_0(X_s) = S_0(X) > 0$, il existe $h \in H$ et $\mathfrak{a} \in \text{car}(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}) >$ tel que $h \cdot X_s \in \mathfrak{a}$. Si $X_n = 0$ alors on obtient $X \in H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$. Si $X_n \neq 0$ alors X_s est semi-régulier et donc $h \cdot X_s \in \mathbb{R}H_1$ ou $\mathbb{R}\varpi(H_1)$. Comme $h \cdot X_n$ commute à $h \cdot X_s$, on obtient $h \cdot X_n \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ par définition de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$. Comme $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}; S_0(X) \neq 0\}$, on obtient donc $X \in H \cdot {}^\lambda \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$.

2. Par le lemme 3.4.1, on a $H \cdot \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q} = H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ et $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right); (tr(Y))^2 det(Y) > 0 \right\}$.

Montrons d'abord que $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \subset \{X \in \mathfrak{q}, S(X) > 0, Q(X) > -2\sqrt{|S(X)|}\}$. Comme ces deux ensembles sont H -invariants, il suffit de montrer que $(\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ est inclus dans $\{X \in \mathfrak{q}, S(X) > 0, Q(X) > -2\sqrt{|S(X)|}\}$.

Si $X = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Y \\ \hline Y & 0 \end{array} \right) \in (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ alors $S(X) = det(Y)^2 > 0$. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de Y . Elles sont soit réelles soit complexes conjuguées et par hypothèse, on a $(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \lambda_1 \lambda_2 > 0$. Ainsi, on obtient la relation $Q(X) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > -2|\lambda_1 \lambda_2| = -2\sqrt{S(X)}$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit X dans \mathfrak{q} tel que $S(X) > 0$ et $Q(X) > -2\sqrt{|S(X)|}$. Soit $X = X_s + X_n$ sa décomposition de Jordan. On a donc $S(X_s) > 0$ et $Q(X_s) > -2\sqrt{|S(X_s)|}$. Ainsi, il existe $h \in H$ et $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_{-,-}\}$ tels que $h \cdot X_s \in \mathfrak{a}$. Si $Q(X_s) \geq 0$ alors $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{a}_{+,+}, \mathfrak{a}_2\}$. Si $Q(X_s) < 0$ alors $S_0(X_s) < 0$ et donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2$. Ainsi, on a toujours $h \cdot X_s \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$.

Si $X_n = 0$ on obtient alors $h \cdot X \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$. Si $X_n \neq 0$ alors X_s est semi-régulier et donc $h \cdot X_s \in \mathbb{R}H_3$. Comme $h \cdot X_n$ commute à $h \cdot X_s$, il appartient à $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$ par définition de $\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$. On conclut donc $h \cdot X \in \mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q}$.

3. On a $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) = \varpi(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. Comme $S(\varpi(X)) = S(X)$ et $Q(\varpi(X)) = -Q(X)$, on obtient $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+) = \{X \in \mathfrak{q}, S(X) > 0, Q(X) < 2\sqrt{|S(X)|}\}$.

4. Soit $X \in \mathcal{U}$. Alors X_s est non nul et les valeurs $Q(X) = Q(X_s)$ et $S_0(X) = S_0(X_s)$ ne sont pas simultanément nulles. Supposons que $S_0(X)$ soit non nul. Si $S_0(X) > 0$, alors X est dans $H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$.

Si $S_0(X) < 0$, alors on a $Q(X)^2 - 4S(X) < 0$ ce qui donne $S(X) > 0$ et $(Q(X) - 2\sqrt{S(X)})(Q(X) + 2\sqrt{S(X)}) < 0$. Comme $Q(X) - 2\sqrt{S(X)} < Q(X) + 2\sqrt{S(X)}$, on obtient $Q(X) - 2\sqrt{S(X)} < 0 < Q(X) + 2\sqrt{S(X)}$, ce qui implique que X est dans $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \cap H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$.

Si $S_0(X) = 0$, alors $Q(X)$ est non nul et on a $S(X) = Q(X)^2/4 > 0$ et $Q(X) = \pm 2\sqrt{S(X)}$. Nécessairement X est dans $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ ou $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$.

La réciproque est immédiate. ■

5.2 Conditions de recollement

Nous rappelons les notations suivantes introduites dans le paragraphe 1.3 et la définition 3.1.2.

Si $X = \left(\begin{array}{cc} 0 & Y \\ Z & 0 \end{array} \right)$ alors $u(X)$ et $v(X)$ désignent les valeurs propres de YZ et elles caractérisent la H -orbite de X lorsque X est semi-simple.

Si F est une fonction H -invariante sur \mathfrak{q}^{reg} , les fonctions $F_{\mathfrak{m}}$ définie sur $(\mathbb{R}^*)^2 - diag$, et F_2 définie sur $(\mathbb{R}^*)^2$ vérifient, pour $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg}$ alors $F(X) = F_{\mathfrak{m}}(u(X), v(X))$ et pour $X_{\tau, \theta} \in \mathfrak{a}_2$ alors $F(X_{\tau, \theta}) = F_2(\tau, \theta)$. Pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$, on note $(\mathcal{M}_H f)_{\mathfrak{m}} = \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}$ et $(\mathcal{M}_H f)_2 = \mathcal{M}f_2$.

Dans tout ce paragraphe, on se placera sous les hypothèses suivantes.

Soit $\Phi \in L_{loc}^1(\mathcal{U})^H$ une solution du système $(E_{\chi})(\mathfrak{q}^{reg})$. Pour conserver les propriétés de symétrie et anti-symétrie des fonctions, on exprime le système (E_{χ}) à l'aide de la base $\{Q, S_0\}$ de $\mathbb{C}[\mathfrak{q}]^H$.

On note $\tilde{\Psi} = (|\delta|\Phi)|\mathfrak{q}^{reg}$. Par l'étude du paragraphe précédent, pour chaque $\mathfrak{a} \in car(\mathfrak{q})$, la fonction $\tilde{\Psi}|_{\mathfrak{a}^{reg}}$ est une fonction analytique $W_H(\mathfrak{a})$ -invariante solution du système

$$(S_{\mathfrak{a}^{reg}, \chi}) \left\{ \begin{array}{l} (L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2})\tilde{\Psi} = (\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{\Psi} \\ (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2\tilde{\Psi} = (\lambda_1 - \lambda_2)^2\tilde{\Psi} \end{array} \right. \quad \text{sur } \mathfrak{a}^{reg},$$

où α_1 et α_2 désignent les racines positives de multiplicité 1 de \mathfrak{a} .

Par le lemme 4.2.1 et la proposition 4.2.3, il existe une fonction $\Psi_{\mathfrak{m}}$ analytique sur $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 / (t_1 - t_2)t_1t_2 \neq 0\}$ et symétrique par rapport aux deux variables telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} [(L_1 + L_2)\Psi_{\mathfrak{m}}](t_1, t_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) \\ [(L_1 - L_2)^2\Psi_{\mathfrak{m}}](t_1, t_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2\Psi_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) \end{array} \right. ,$$

et une fonction Ψ_c analytique sur un ouvert U connexe de \mathbb{C}^2 contenant $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_1 = \bar{z}_2 \text{ et } Im(z_1) > 0\}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} [(L_{c,1} + L_{c,2})\Psi_c](z_1, z_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi_c(z_1, z_2) \\ [(L_{c,1} - L_{c,2})^2\Psi_c](z_1, z_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2\Psi_c(z_1, z_2) \end{array} \right. \quad \text{sur } U,$$

avec pour tout $X \in \mathfrak{q}^{reg}$:

$$\tilde{\Psi}(X) = \left\{ \begin{array}{ll} \Psi_{\mathfrak{m}}(u(X), v(X)) & \text{si } X \in H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg} \\ \Psi_c(u(X), v(X)) & \text{si } X \in H \cdot \mathfrak{a}_2^+ \end{array} \right. ,$$

Plus précisément, l'élément $X = X_{\tau, \theta}$ appartient à \mathfrak{a}_2^+ si et seulement si $\tau > 0$ et $\theta > 0$, et dans ce cas on a $\tilde{\Psi}(X_{\tau, \theta}) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$.

Pour $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on note $\Psi_2(\tau, \theta) = \tilde{\Psi}(X_{\tau, \theta})$. Par invariance de $\tilde{\Psi}$ sous l'action du groupe de Weyl $W_H(\mathfrak{a}_2)$, la fonction Ψ_2 est paire par rapport à chaque variable.

Définition 5.2.1. Soient f et g deux fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^2 . Soit D un opérateur différentiel sur \mathbb{R}^2 tel que Df et Dg existent. On notera, lorsque les intégrales considérées convergent

$$I_{\mathfrak{m}}(D, f, g) = \int_{t_1 > t_2} (f(Dg) - (Df)g)(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

$$I_2(D, f, g) = \int_{\mathbb{R}^2} (\tau^2 + \theta^2) (f(Dg) - (Df)g)(\tau, \theta) d\tau d\theta$$

Par la formule d'intégration de Weyl (lemme 3.1.2) et l'action des opérateurs différentiels sur les intégrales orbitales (corollaire 4.2.1), on a

$$\begin{aligned} \langle \partial(Q)T_\Phi, f \rangle - \langle T_{\partial(Q)\Phi}, f \rangle &= I_m(L_1 + L_2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) + 2I_2(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2), \\ \text{et } \langle \partial(S_0)T_\Phi, f \rangle - \langle T_{\partial(S_0)\Phi}, f \rangle &= I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) + 2I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2). \end{aligned}$$

Ainsi, T_Φ est une distribution propre invariante sur \mathcal{U} pour le caractère χ si et seulement si, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, les fonctions Ψ_m et Ψ_2 satisfont les relations suivantes :

$$(\mathcal{R}ec) \begin{cases} I_m(L_1 + L_2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) + 2I_2(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0 \\ I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) + 2I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0 \end{cases}$$

Dans les paragraphes suivants, nous allons étudier ces relations successivement pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$, puis $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et enfin $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$.

5.2.1 Recollement sur $H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$

Par le lemme 5.1.1, si $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ alors le support de f est contenu dans $\{X \in \mathfrak{q}; S_0(X) > 0\}$. Comme $H \cdot \mathfrak{a}_2 \subset \{X \in \mathfrak{q}; S_0(X) \leq 0\}$, la fonction $\mathcal{M}f_2$ est identiquement nulle.

D'autre part, par le théorème 3.3.1, l'application $f \mapsto \mathcal{M}f_m$ est surjective de $\mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ dans \mathcal{H}_{\log}^2 . Ainsi, les relations de recollement ($\mathcal{R}ec$) pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ sont équivalentes à

$$I_m(L_1 + L_2, \Psi_m, F) = 0 \text{ et } I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi_m, F) = 0, \text{ pour tout } F \in \mathcal{H}_{\log}^2.$$

Pour simplifier les notations, on pose dans tout ce paragraphe $\Psi = \Psi_m$.

Une fonction de \mathcal{H}_{\log}^2 s'écrit sous la forme $a(t_1, t_2) + \log |t_1| b(t_1, t_2) + \log |t_2| b(t_2, t_1) + \log |t_1| \log |t_2| c(t_1, t_2)$, avec a et c symétriques par rapport aux deux variables et a, b et c dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 - \text{diag})$.

Par le lemme 4.2.1 et la proposition 4.2.2, sur chaque composante connexe de $(\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$, la fonction Ψ s'écrit comme somme de fonctions de la forme $(A(t_1) + \log |t_1| B(t_1))(C(t_2) + \log |t_2| D(t_2))$, où A, B, C et D sont des fonctions analytiques sur \mathbb{R} .

Pour exprimer les conditions de recollement, nous introduisons les notations suivantes.

Soit $\mathcal{E}_{\text{sing}}$ l'espace des fonctions u de la forme $u(t) = v(t) + \log |t| w(t)$, où v et w sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^* et admettent, ainsi que leurs dérivées, des limites à droite et à gauche en 0. Pour une fonction f continue sur \mathbb{R}^* , on

notera lorsqu'elles existent $f(0^+)$ et $f(0^-)$ ses limites à droite et à gauche en 0.

Pour $u \in \mathcal{E}_{sing}$, on pose $u^{[1]}(t) = tu'(t)$ et $u^{[0]}(t) = u(t) - \log|t|u^{[1]}(t)$, de telle sorte que

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} u^{[1]}(t) = w(0^\pm) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^\pm} u^{[0]}(t) = v(0^\pm).$$

Ainsi, pour h et u dans \mathcal{E}_{sing} et $L = 4(t \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t})$, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} (u^{[1]}h^{[0]} - u^{[0]}h^{[1]})(t) = (u^{[1]}h^{[0]} - u^{[0]}h^{[1]})(0^\pm) = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} (t(u'h - uh'))(t)$$

$$\text{et} \quad h(t)(Lu)(t) - (Lh)(t)u(t) = 4 \frac{d}{dt} [h^{[0]}u^{[1]} - h^{[1]}u^{[0]}](t) = 4 \frac{d}{dt} [t(u'h - uh')](t).$$

Pour f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et $j \in \{1, 2\}$, on définit les opérateurs K_j par

$$K_j(f, g)(t_1, t_2) = t_j \left(f \frac{\partial g}{\partial t_j} - \frac{\partial f}{\partial t_j} g \right) (t_1, t_2).$$

En notant $L_j = 4(t_j \frac{\partial^2}{\partial t_j^2} + \frac{\partial}{\partial t_j})$, on a donc $f(L_j g) - (L_j f)g = 4 \frac{\partial}{\partial t_j} K_j(f, g)$.

Par ailleurs, pour f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ où $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et $(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, on note f_x la fonction définie sur \mathbb{R}^{n_2} par $f_x(y) = f(x, y)$ et f^y la fonction définie sur \mathbb{R}^{n_1} par $f^y(x) = f(x, y)$.

Remarque 5.2.1. Soit $F \in \mathcal{H}_{\log}^2$. Par la description de \mathcal{H}_{\log}^2 et les hypothèses sur Ψ , les fonctions F_{t_1} et Ψ_{t_1} pour $t_1 \in \mathbb{R}^*$ et les fonctions F^{t_2} et Ψ^{t_2} pour $t_2 \in \mathbb{R}^*$ appartiennent à \mathcal{E}_{sing} .

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et $j \in \{0, 1\}$, les limites $(\Psi_t)^{[j]}(0^\pm)$ et $(\Psi^t)^{[j]}(0^\pm)$ existent.

Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et $j \in \{0, 1\}$, les fonctions $x \mapsto (F_t)^{[j]}(x)$ et $x \mapsto (F^t)^{[j]}(x)$ sont continues en 0.

Remarque 5.2.2. Pour $F \in \mathcal{H}_{\log}^2$, on a

$$K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) = ((\Psi^{t_2})^{[0]}(F^{t_2})^{[1]} - (\Psi^{t_2})^{[1]}(F^{t_2})^{[0]})(t_1)$$

et

$$K_2(\Psi, F)(t_1, t_2) = ((\Psi_{t_1})^{[0]}(F_{t_1})^{[1]} - (\Psi_{t_1})^{[1]}(F_{t_1})^{[0]})(t_2).$$

Remarque 5.2.3. 1. Les fonctions Ψ et F étant symétriques, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$ et pour $j \in \{0, 1\}$, elles vérifient les relations

$$(F_{t_1})^{[j]}(t_2) = (F^{t_2})^{[j]}(t_1) \quad \text{et} \quad (\Psi_{t_1})^{[j]}(t_2) = (\Psi^{t_2})^{[j]}(t_1)$$

et donc on a

$$K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) = K_2(\Psi, F)(t_2, t_1).$$

2. Comme F est une fonction à support borné, nulle au voisinage de tout élément diagonal de \mathbb{R}^2 , il en est de même des fonctions $K_j(\Psi, F)$ pour $j \in \{1, 2\}$.

Lemme 5.2.1. Pour tout $F \in \mathcal{H}_{\log}^2$, les fonctions $t \mapsto K_2(\Psi, F)(t, 0^\pm)$ sont intégrables sur \mathbb{R} et on a

$$I_m(L_1 + L_2, \Psi, F) = 4 \int_{\mathbb{R}} [K_2(\Psi, F)(t, 0^-) - K_2(\Psi, F)(t, 0^+)] dt.$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} I_m(L_1 + L_2, \Psi, F) &= \int_{t_1 > t_2} (\Psi(L_1 + L_2)F - F(L_1 + L_2)\Psi)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_{t_1 > t_2} ([\Psi L_1 F - F L_1 \Psi] + [\Psi L_2 F - F L_2 \Psi])(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Soit $k \in \{1, 2\}$. Montrons que $\Psi L_k F - F L_k \Psi = 4 \frac{\partial}{\partial t_k} K_k(\Psi, F)$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 . Pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^* , nous avons l'égalité $L(\log |t| f(t)) = 8f'(t) + 4 \log |t| (f'(t) + t f''(t))$. Ainsi, pour chaque composante connexe \mathcal{C} de $(\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$, il existe des fonctions $G_{i,j} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 - \text{diag})$ où $0 \leq i, j \leq 2$ telles que, pour $(t_1, t_2) \in \mathcal{C}$, on ait

$$(\Psi(L_k F) - F(L_k \Psi))(t_1, t_2) = \sum_{0 \leq i, j \leq 2} G_{i,j}(t_1, t_2) (\log |t_1|)^i (\log |t_2|)^j.$$

Par suite, la fonction $\Psi L_k F - F L_k \Psi = 4 \frac{\partial}{\partial t_k} K_k(\Psi, F)$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 . Les propriétés sur le support de F (remarque 5.2.3 (2.)) et le théorème de Fubini assurent l'intégrabilité des fonctions $K_k(\Psi, F)(t, 0^\pm)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} &I_m(L_1 + L_2, \Psi, F) \\ &= \int_{t_1 > t_2} [\Psi L_1 F - F L_1 \Psi](t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_{t_1 > t_2} [\Psi L_2 F - F L_2 \Psi](t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= 4 \int_{t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + 4 \int_{t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_2} K_2(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, le théorème de Fubini et les propriétés sur le support de F donne $\int_{t_1 > t_2 > 0} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0$, et donc, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_{t_1 > 0 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_{0 > t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= - \int_{-\infty}^0 K_1(\Psi, F)(0^+, t) dt + \int_{-\infty}^0 K_1(\Psi, F)(0^-, t) dt, \end{aligned}$$

Par la symétrie des fonctions Ψ et F (remarque 5.2.3), on a $K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) = K_2(\Psi, F)(t_2, t_1)$ ce qui implique

$$\int_{t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} K_1(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = - \int_{-\infty}^0 K_2(\Psi, F)(t, 0^+) dt + \int_{-\infty}^0 K_2(\Psi, F)(t, 0^-) dt.$$

De même, on obtient la relation

$$\int_{t_1 > t_2} \frac{\partial}{\partial t_2} K_2(\Psi, F)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = - \int_0^{+\infty} K_2(\Psi, F)(t, 0^+) dt + \int_0^{+\infty} K_2(\Psi, F)(t, 0^-) dt.$$

Ces relations donnent alors le résultat voulu. \blacksquare

Proposition 5.2.1. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout $F \in \mathcal{H}_{\log}^2$, on a $I_m(L_1 + L_2, \Psi, F) = 0$,
2. Pour $j \in \{0, 1\}$ et $t_1 \in \mathbb{R}^*$ alors $(\Psi_{t_1})^{[j]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[j]}(0^-)$.
3. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$K_2(\Psi, \mathcal{M}f_m)(t, 0^+) = K_2(\Psi, \mathcal{M}f_m)(t, 0^-).$$

Remarque 5.2.4. Grâce à la remarque 5.2.3, on constate que

1. le point 2. de la proposition précédente est équivalent à l'assertion suivante :
(2'.) pour $j \in \{0, 1\}$ et $t_2 \in \mathbb{R}^*$ alors $(\Psi^{t_2})^{[j]}(0^+) = (\Psi^{t_2})^{[j]}(0^-)$.
2. le point 3. de la proposition précédente est équivalent à l'assertion suivante :
(3'.) pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$K_1(\Psi, \mathcal{M}f_m)(0^+, t) = K_1(\Psi, \mathcal{M}f_m)(0^-, t).$$

Preuve de la proposition 5.2.1 : Supposons que $I_m(L_1 + L_2, \Psi, F) = 0$ pour tout $F \in \mathcal{H}_{\log}^2$. Par le lemme 5.2.1, ceci s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}} [K_2(\Psi, F)(t, 0^-) - K_2(\Psi, F)(t, 0^+)] dt = 0,$$

ce qui s'écrit également, grâce à la remarque 5.2.2

$$\int_{\mathbb{R}} \left[(F_{t_1})^{[1]}(0) ((\Psi_{t_1})^{[0]}(0^-) - (\Psi_{t_1})^{[0]}(0^+)) - (F_{t_1})^{[0]}(0) ((\Psi_{t_1})^{[1]}(0^-) - (\Psi_{t_1})^{[1]}(0^+)) \right] dt_1 = 0.$$

Nous allons appliquer cette égalité à des fonctions test pour obtenir les relations voulues sur Ψ . Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ quelconque. Il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que

$\text{supp}(\chi) \subset [-\varepsilon^{-1}, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset [\frac{\varepsilon}{2}, 2\varepsilon^{-1}]$ et $\varphi \equiv 1$ sur $[\varepsilon; \varepsilon^{-1}]$. On définit la fonction A de \mathcal{H}_{\log}^2 par

$$A(t_1, t_2) = \chi(|t_1 - t_2|)(\varphi(t_1) + \varphi(t_2)) + \chi(-|t_1 - t_2|)(\varphi(-t_1) + \varphi(-t_2)).$$

Ainsi, pour tout $t_1 \in \mathbb{R}$, on a $(A_{t_1})^{[1]}(0^\pm) = 0$ et $(A_{t_1})^{[0]}(0^\pm) = A(t_1, 0)$ et de plus, si $t_1 > 0$ alors $A(t_1, 0) = \chi(t_1)\varphi(t_1) = \chi(t_1)$ et si $t_1 < 0$ alors $A(t_1, 0) = \chi(-|t_1|)\varphi(-t_1) = \chi(t_1)$.

On obtient donc

$$I_{\mathfrak{m}}(L_1 + L_2, \Psi, A) = 4 \int_{\mathbb{R}} \chi(t_1)((\Psi_{t_1})^{[1]}(0^+) - (\Psi_{t_1})^{[1]}(0^-)) dt_1 = 0.$$

Cette égalité est vraie pour toute fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ ce qui donne la première conclusion

$$(\Psi_{t_1})^{[1]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[1]}(0^-), \forall t_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Maintenant, pour (t_1, t_2) dans $(\mathbb{R}^*)^2$, on pose $C(t_1, t_2) = (\log |t_1| + \log |t_2|)A(t_1, t_2) \in \mathcal{H}_{\log}^2$. Pour $t_1 \in \mathbb{R}^*$, on a $(C_{t_1})^{[1]}(0^\pm) = A(t_1, 0) = \chi(t_1)$ et $(C_{t_1})^{[0]}(0^\pm) = \log |t_1|\chi(t_1)$. De plus, comme $(\Psi_{t_1})^{[1]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[1]}(0^-)$, on en déduit

$$I_{\mathfrak{m}}(L_1 + L_2, \Psi, C) = 4 \int_{\mathbb{R}} \left(\chi(t_1)((\Psi_{t_1})^{[0]}(0^+) - (\Psi_{t_1})^{[0]}(0^-)) \right) dt_1.$$

Nous concluons comme précédemment que

$$(\Psi_{t_1})^{[0]}(0^+) - (\Psi_{t_1})^{[0]}(0^-) = 0, \forall t_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Nous obtenons ainsi l'implication (1) \Rightarrow (2).

On suppose maintenant que pour $j \in \{0, 1\}$ et $t_1 \in \mathbb{R}^*$ alors $(\Psi_{t_1})^{[j]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[j]}(0^-)$. Par la remarque 5.2.2, pour $F \in \mathcal{H}_{\log}^2$, on a alors immédiatement $K_2(\Psi, F)(t_1, 0^+) = K_2(\Psi, F)(t_1, 0^-)$ pour tout $t_1 \in \mathbb{R}^*$ ce qui donne l'assertion (3).

L'implication (3) \Rightarrow (1) est immédiate par l'expression de $I_{\mathfrak{m}}(L_1 + L_2, \Psi, F)$ donnée au lemme 5.2.1 et la surjectivité l'application $f \mapsto \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}$ de $\mathcal{D}(H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ dans \mathcal{H}_{\log}^2 . ■

Définition 5.2.2. 1. Pour f et g deux fonctions d'une variable x réelle ou complexe, on note

$$S^+(f, g)(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1)$$

et

$$[f, g](x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1).$$

2. Si $(f_j)_{j \in J}$ est une famille finie d'un espace vectoriel, on note $\text{Vect}\langle f_j; j \in J \rangle$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f_j)_{j \in J}$.

Corollaire 5.2.1. *La fonction Ψ satisfait l'une des conditions équivalentes de la proposition 5.2.1 si et seulement si*

$$\Psi \in \text{Vect}\langle S^+(A, B)(t_1, t_2), \text{signe}(t_1 - t_2)[A, B](t_1, t_2); (A, B) \in \text{Sol}(L, \lambda_1) \times \text{Sol}(L, \lambda_2) \rangle.$$

Preuve : Par le lemme 4.2.1, la fonction Ψ s'écrit, sous les formes suivantes :
Pour $i \in \{1, 2\}$, il existe $(f_i^+, g_i^+) \in \text{Sol}(L, \lambda_2) \times \text{Sol}(L, \lambda_1)$ telles que, pour $t_1 > t_2 > 0$,

$$\Psi(t_1, t_2) = f_1^+(t_1)\Phi_{\lambda_1}(t_2) + f_2^+(t_1)W_{\lambda_1}^r(t_2) + g_1^+(t_1)\Phi_{\lambda_2}(t_2) + g_2^+(t_1)W_{\lambda_2}^r(t_2),$$

Pour $i \in \{1, 2\}$, Il existe $(f_i^-, g_i^-) \in \text{Sol}(L, \lambda_2) \times \text{Sol}(L, \lambda_1)$ telles que, pour $t_1 > 0 > t_2$,

$$\Psi(t_1, t_2) = f_1^-(t_1)\Phi_{\lambda_1}(t_2) + f_2^-(t_1)W_{\lambda_1}^r(t_2) + g_1^-(t_1)\Phi_{\lambda_2}(t_2) + g_2^-(t_1)W_{\lambda_2}^r(t_2),$$

La condition $(\Psi_{t_1})^{[1]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[1]}(0^-)$ implique que $f_2^+(t_1) + g_2^+(t_1) = f_2^-(t_1) + g_2^-(t_1)$ pour tout $t_1 \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $\text{Sol}(L, \lambda_2) \cap \text{Sol}(L, \lambda_1) = \{0\}$, alors, pour tout $t_1 \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient $f_2^+(t_1) = f_2^-(t_1)$ et $g_2^+(t_1) = g_2^-(t_1)$. On pose alors $f_2(t_1) = f_2^+(t_1) = f_2^-(t_1)$ et $g_2(t_1) = g_2^+(t_1) = g_2^-(t_1)$.

De même la condition $(\Psi_{t_1})^{[0]}(0^+) = (\Psi_{t_1})^{[0]}(0^-)$ implique que, pour tout $t_1 \in \mathbb{R}_+^*$ alors $f_1(t_1) := f_1^+(t_1) = f_1^-(t_1)$ et $g_1(t_1) := g_1^+(t_1) = g_1^-(t_1)$. Ainsi sur $\{(t_1, t_2), t_1 > t_2, t_1 > 0\}$, nous avons

$$\Psi(t_1, t_2) = f_1(t_1)\Phi_{\lambda_1}(t_2) + f_2(t_1)W_{\lambda_1}^r(t_2) + g_1(t_1)\Phi_{\lambda_2}(t_2) + g_2(t_1)W_{\lambda_2}^r(t_2).$$

En raisonnant de la même manière sur l'ensemble $\{(t_1, t_2), t_1 > t_2, t_2 < 0\}$ en utilisant les relations $(\Psi^{t_2})^{[j]}(0^+) = (\Psi^{t_2})^{[j]}(0^-)$, $j \in \{0, 1\}$, nous obtenons, pour $t_1 > t_2$ et $t_2 < 0$ la même expression pour Ψ , c'est-à-dire $\Psi(t_1, t_2) = f_1(t_1)\Phi_{\lambda_1}(t_2) + f_2(t_1)W_{\lambda_1}^r(t_2) + g_1(t_1)\Phi_{\lambda_2}(t_2) + g_2(t_1)W_{\lambda_2}^r(t_2)$.

Comme Ψ est symétrique par rapport aux deux variables, on peut donc l'écrire comme combinaison linéaire des fonctions $\mathbf{1}_{t_1 \leq t_2} A(t_1)B(t_2) + \mathbf{1}_{t_1 > t_2} A(t_2)B(t_1)$ avec (A, B) ou (B, A) dans $\text{Sol}(L, \lambda_1) \times \text{Sol}(L, \lambda_2)$. On en déduit aisément le corollaire. ■

Proposition 5.2.2. *Soit $\Psi \in \text{Vect}\langle S^+(A, B)(t_1, t_2), \text{signe}(t_1 - t_2)[A, B](t_1, t_2); (A, B) \in \text{Sol}(L, \lambda_1) \times \text{Sol}(L, \lambda_2) \rangle$.*

Alors, pour tout $F \in \mathcal{H}_{\log}^2$, on a la relation

$$I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi, F) = 0.$$

Preuve : Nous allons montrer que les intégrales $I_m(L_1 - L_2, (L_1 - L_2)\Psi, F)$ et $I_m(L_1 - L_2, \Psi, (L_1 - L_2)F)$ existent et sont nulles. Ceci donnera le résultat voulu puisque, dans ce cas, on aura

$$I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi, F) = I_m(L_1 - L_2, (L_1 - L_2)\Psi, F) + I_m(L_1 - L_2, \Psi, (L_1 - L_2)F) = 0.$$

On procède comme dans la preuve du lemme 5.2.1. Par hypothèse sur Ψ et définition de \mathcal{H}_{\log}^2 , pour $g = \Psi$ ou F , il existe des fonctions $(g_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 1}$ de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 telles que, pour $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$, l'on ait

$$g(t_1, t_2) = \sum_{0 \leq i,j \leq 1} g_{i,j}(t_1, t_2) (\log |t_1|)^i (\log |t_2|)^j.$$

Comme, pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^* , pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $L(\log |t| f(t)) = 8f'(t) + 4 \log |t| (f'(t) + t f''(t))$, les fonctions $L_k \Psi$ et $L_k F$, pour $k = 1, 2$ ont une expression du même type. Ainsi, si g désigne l'une des fonctions Ψ , F , $(L_1 - L_2)\Psi$ ou $(L_1 - L_2)F$, les fonctions $(t_1, t_2) \mapsto (g_{t_1})^{[j]}(t_2)$ sont continues en tout point $(t, 0)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.

Comme F est nulle en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^2 - \text{diag}$, le même raisonnement que dans la preuve du lemme 5.2.1 donne que, pour $(g, h) = ((L_1 - L_2)\Psi, F)$ ou $(\Psi, (L_1 - L_2)F)$, la fonction $g(L_k h) - (L_k g)h = 4 \frac{\partial}{\partial t_k} K_k(g, h)$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 et on a la relation

$$\begin{aligned} I_m(L_1 - L_2, g, h) &= 4 \int_{-\infty}^0 [K_1(g, h)(0^-, t) - K_1(g, h)(0^+, t)] dt \\ &\quad - 4 \int_0^{+\infty} [K_2(g, h)(t, 0^-) - K_2(g, h)(t, 0^+)] dt. \end{aligned}$$

Comme Ψ et F sont symétriques, l'une des deux fonctions g ou h est symétrique et l'autre est antisymétrique. Ainsi, pour $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$, on a

$$K_1(g, h)(t_1, t_2) = -K_2(g, h)(t_2, t_1).$$

et on obtient

$$I_m(L_1 - L_2, g, h) = 4 \int_{\mathbb{R}} [K_2(g, h)(t, 0^+) - K_2(g, h)(t, 0^-)] dt.$$

La remarque 5.2.2 et les propriétés de g et h décrites précédemment donnent $K_2(g, h)(t, 0^+) = K_2(g, h)(t, 0^-)$. Ainsi, on obtient

$$I_m(L_1 - L_2, \Psi, (L_1 - L_2)F) = I_m(L_1 - L_2, (L_1 - L_2)\Psi) = 0.$$

■

5.2.2 Recollement sur $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$

Nous étudions dans ce paragraphe les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions Ψ_m et Ψ_2 vérifient les relations $(\mathcal{R}ec)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$.

Les éléments réguliers de $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ sont conjugués par H à un élément de $\mathfrak{a}_{+,+}$ ou de \mathfrak{a}_2 . La H -orbite d'un élément semi-simple de $\mathfrak{a}_{+,+}$ est caractérisée par deux réels positifs t_1 et t_2 , paramétrisation utilisée dans le paragraphe précédent et celle d'un élément semi-simple de \mathfrak{a}_2 par deux nombres complexes conjugués $(\tau + i\theta)^2$ et $(\tau - i\theta)^2$.

Ici, nous utiliserons la paramétrisation suivante des éléments de $\mathfrak{a}_{+,+}$ plus cohérente avec celle de \mathfrak{a}_2 . Pour $(\tau, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$X_{\tau, \theta}^r = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & \tau + \theta & 0 \\ & & 0 & \tau - \theta \\ \hline \tau + \theta & 0 & & \\ 0 & \tau - \theta & & 0 \end{array} \right), \text{ de telle sorte que}$$

$\mathfrak{a}_{+,+} = \{X_{\tau, \theta}^r, (\tau, \theta) \in \mathbb{R}^2\}$. Avec ces notations, la H -orbite de $X_{\tau, \theta}^r$ est donc l'orbite caractérisée par les deux réels positifs $(\tau + \theta)^2$ et $(\tau - \theta)^2$ et on a $|\delta|(X_{\tau, \theta}^r) = 4|\tau\theta|$.

Pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et $\Psi_{\mathfrak{m}}$ fixée comme précédemment, on définit les fonctions $(\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r$ et $(\Psi_{\mathfrak{m}})_r$ sur $\{(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}^*)^2; \tau^2 \neq \theta^2\}$ par

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r(\tau, \theta) &= \mathcal{M}_H(f)(X_{\tau, \theta}^r) = \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}((\tau + \theta)^2, (\tau - \theta)^2) \\ (\Psi_{\mathfrak{m}})_r(\tau, \theta) &= \tilde{\Psi}(X_{\tau, \theta}^r) = \Psi_{\mathfrak{m}}((\tau + \theta)^2, (\tau - \theta)^2) \end{aligned}.$$

Comme $\tilde{\Psi}$ et $\mathcal{M}_H(f)$ sont invariantes par le groupe de Weyl $W_H(\mathfrak{a}_{+,+})$, les fonctions $(\Psi_{\mathfrak{m}})_r$ et $(\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r$ sont symétriques et paires en chaque variable.

Pour $\Phi = \frac{\tilde{\Psi}}{|\delta|}$, la formule d'intégration de Weyl (lemme 3.1.2) donne alors

$$\begin{aligned} \int_{H \cdot \mathfrak{a}_{+,+}} \Phi(X) f(X) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(X_{\tau, \theta}^r) \mathcal{M}_H(f)(X_{\tau, \theta}^r) |4\tau\theta| |\tau^2 - \theta^2| d\tau d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\Psi_{\mathfrak{m}})_r(\tau, \theta) (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r(\tau, \theta) |\tau^2 - \theta^2| d\tau d\theta = \int_{t_1 > t_2 > 0} \Psi_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Définition 5.2.3. Soient f et g deux fonctions des variables $(\tau, \theta) \in \{(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, x^2 \neq y^2\}$. Soit D un opérateur différentiel sur \mathbb{R}^2 tel que Df et Dg existent. On notera, lorsque l'intégrale considérée converge

$$I_{\mathfrak{m}}^r(D, f, g) = \int_{\mathbb{R}^2} |\tau^2 - \theta^2| (f(Dg) - (Df)g)(\tau, \theta) d\tau d\theta.$$

Sur chaque sous-espace de Cartan \mathfrak{a} , les composantes radiales des opérateurs $\partial(Q)$ et $\partial(S_0)$ sont données en terme des opérateurs $L_{\gamma} = \frac{1}{4\gamma} \partial h_{\gamma} (\gamma \partial h_{\gamma})$ (proposition 4.1.1) où γ est une racine positive de multiplicité 1 de \mathfrak{a} .

Sur $\mathfrak{a}_{+,+}$, les racines positives de multiplicité 1 sont données par $\alpha_1(X_{\tau,\theta}^r) = 2(\tau + \theta)$ et $\alpha_2(X_{\tau,\theta}^r) = 2(\tau - \theta)$. Par ailleurs, les racines positives de multiplicité 1 de \mathfrak{a}_2 sont données par $\alpha(X_{\tau,\theta}) = 2(\tau + \imath\theta)$ et sa conjuguée $\bar{\alpha}$. Ainsi, les opérateurs L_γ , pour $\gamma(X) = 2(\tau + \epsilon\theta)$ avec $\epsilon = \pm 1$ si $X = X_{\tau,\theta}^r \in \mathfrak{a}_{+,+}$ et $\epsilon = \pm \imath$ si $X = X_{\tau,\theta} \in \mathfrak{a}_2$, s'expriment de la manière suivante

$$L_\gamma = \frac{1}{4(\tau + \epsilon\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) ((\tau + \epsilon\theta) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)).$$

Grâce aux lemmes 4.2.2 et corollaire 4.2.1 on obtient donc :

Lemme 5.2.2. *Pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on a*

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{m}}(L_1 + L_2, \Psi_{\mathfrak{m}}, \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}) &= I_{\mathfrak{m}}^r(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r) \\ \text{et } I_{\mathfrak{m}}((L_1 - L_2)^2, \Psi_{\mathfrak{m}}, \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}) &= I_{\mathfrak{m}}^r((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r). \end{aligned}$$

Ainsi les relations de recollement ($\mathcal{R}ec$) s'écrivent pour $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$,

$$\begin{cases} I_{\mathfrak{m}}^r(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r) + 2I_2(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0 \\ I_{\mathfrak{m}}^r((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r) + 2I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0 \end{cases}$$

Pour étudier ces relations, on introduit les notations suivantes. Pour g et h deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , on définit les opérateurs R_τ et R_θ par

$$R_\tau(g, h)(\tau, \theta) = \left(g \frac{\partial h}{\partial \tau} - \frac{\partial g}{\partial \tau} h \right) (\tau, \theta) \text{ et } R_\theta(g, h)(\tau, \theta) = \left(g \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{\partial g}{\partial \theta} h \right) (\tau, \theta).$$

Soit $\gamma(X) = 2(\tau + \epsilon\theta)$ avec $\epsilon = \pm 1$ si $X = X_{\tau,\theta}^r \in \mathfrak{a}_{+,+}$ et $\epsilon = \pm \imath$ si $X = X_{\tau,\theta} \in \mathfrak{a}_2$. On a alors $\partial h_\gamma = (\frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta})$ et donc $g(\partial h_\gamma h) - (\partial h_\gamma g)h = R_\tau(g, h) + \bar{\epsilon} R_\theta(g, h)$.

Ainsi, pour $(\tau, \theta) \in U$ avec $\tau^2 \neq \epsilon^2 \theta^2$, on obtient

$$|\tau^2 - \epsilon^2 \theta^2| [g(L_\gamma h) - (L_\gamma g)h](\tau, \theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(|\tau^2 - \epsilon^2 \theta^2| [R_\tau(g, h) + \bar{\epsilon} R_\theta(g, h)] \right) (\tau, \theta),$$

et donc, on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} & |\tau^2 - \theta^2| (g(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2})(h) - h(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2})(g))(\tau, \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (|\tau^2 - \theta^2| R_\tau(g, h))(\tau, \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (|\tau^2 - \theta^2| R_\theta(g, h))(\tau, \theta) \right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & |\tau^2 + \theta^2| (g(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}})(h) - h(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}})(g))(\tau, \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} ((\tau^2 + \theta^2) R_\tau(g, h))(\tau, \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} ((\tau^2 + \theta^2) R_\theta(g, h))(\tau, \theta) \right]. \end{aligned}$$

Nous rappelons maintenant les propriétés des fonctions $(\Psi_m)_r$, Ψ_2 , $(\mathcal{M}f_m)_r$ et $\mathcal{M}f_2$ que nous utiliserons.

Par le théorème 3.4.1, pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, il existe une unique fonction $G_f = a(\tau, w) + |w|^{1/2}b(\tau, w) \in \mathcal{H}_Y^{pair}$ où a et b sont paires par rapport à la première variable et appartiennent à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\})$, telle que, pour $\tau\theta \neq 0$, on ait

$$\begin{cases} (\mathcal{M}f_m)_r(\tau, \theta) = \mathcal{M}_H(f)(X_{\tau, \theta}^r) = G_f(\tau, \theta^2) = a(\tau, \theta^2) & \text{pour } \tau^2 - \theta^2 > 0 \\ (\mathcal{M}f_m)_r(\tau, \theta) = \mathcal{M}_H(f)(X_{\theta, \tau}^r) = G_f(\theta, \tau^2) = a(\theta, \tau^2) & \text{pour } \tau^2 - \theta^2 < 0 \\ \mathcal{M}f_2(\tau, \theta) = \mathcal{M}_H(f)(X_{\tau, \theta}) = G_f(\tau, -\theta^2) = a(\tau, -\theta^2) + |\theta|b(\tau, -\theta^2). \end{cases}$$

De plus, l'application $f \mapsto G_f$ est surjective de $\mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ dans \mathcal{H}_Y^{pair} .

Remarque 5.2.5. La fonction $(\mathcal{M}f_m)_r$ est symétrique et paire en chaque variable. Elle se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support compact contenu dans $\{(\tau, \theta) \in \mathbb{R}^2; \tau^2 \neq \theta^2\}$. La fonction $\mathcal{M}f_2$ se prolonge en une fonction continue à support compact contenu dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et pour tout $D \in \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \theta}]$ et $\tau \neq 0$, les limites $(D\mathcal{M}f_2)(\tau, 0^\pm)$ existent.

La fonction $(\Psi_m)_r(\tau, \theta)$ est symétrique et paire en chaque variable. Grâce au lemme 4.2.1, pour $\tau > \theta > 0$, elle est somme de fonctions de la forme $[A((\tau + \theta)^2) + \log(\tau + \theta)^2 B((\tau + \theta)^2)][C((\tau - \theta)^2) + \log(\tau - \theta)^2 D((\tau - \theta)^2)]$, où A , B , C et D sont analytiques sur \mathbb{R} .

La fonction Ψ_2 est paire en chaque variable et la proposition 4.2.2 permet d'écrire Ψ_2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ comme somme de fonctions de la forme $[A_c((\tau + i\theta)^2) + \log(\tau + i\theta)^2 B_c((\tau + i\theta)^2)][C_c((\tau - i\theta)^2) + \log(\tau - i\theta)^2 D_c((\tau - i\theta)^2)]$, où A_c , B_c , C_c et D_c sont analytiques sur \mathbb{C} .

Remarque 5.2.6. En particulier, pour tout $D \in \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \theta}]$ et $\tau \neq 0$, les limites $D(\Psi_m)_r(\tau, 0^+)$, $D(\Psi_m)_r(0^+, \tau)$ et $(D\Psi_2)(\tau, 0^\pm)$ existent.

Lemme 5.2.3. Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. On a les relations suivantes

$$\begin{aligned} I_m^r(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) &= -4 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\theta((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)(\tau, 0^+) d\tau \\ I_2(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) &= 2 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\theta(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)(\tau, 0^+) d\tau. \end{aligned}$$

Preuve : Par les remarques 5.2.5 et 5.2.6, pour $R = R_\tau$ ou R_θ et $D \in \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \theta}]$, la fonction $D[|\tau^2 - \theta^2| R((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)]$ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^2 à support compact contenu dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2 - \text{diag})$. Par parité en τ et θ de $(\Psi_m)_r$ et $(\mathcal{M}f_m)_r$, cette fonction est intégrable sur \mathbb{R}^2 . Ainsi, on a

$$I_{\mathfrak{m}}^r(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}, (\Psi_{\mathfrak{m}})_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r) = 2 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (|\tau^2 - \theta^2| R_{\tau}((\Psi_{\mathfrak{m}})_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r)) (\tau, \theta) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (|\tau^2 - \theta^2| R_{\theta}((\Psi_{\mathfrak{m}})_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r)) (\tau, \theta) \right) d\tau d\theta$$

$$= -2 \int_0^{+\infty} \theta^2 R_{\tau}((\Psi_{\mathfrak{m}})_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r)(0^+, \theta) d\theta - 2 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_{\theta}((\Psi_{\mathfrak{m}})_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r)(\tau, 0^+) d\tau.$$

Comme les fonctions $(\Psi_{\mathfrak{m}})_r$ et $(\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r$ sont symétriques en (τ, θ) , on obtient

$$I_{\mathfrak{m}}^r(L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2}, (\Psi_{\mathfrak{m}})_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r) = -4 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_{\theta}((\Psi_{\mathfrak{m}})_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r)(\tau, 0^+) d\tau,$$

ce qui donne la première égalité.

De même, par les remarques 5.2.5 et 5.2.6, les fonctions $\frac{\partial}{\partial \tau}[(\tau^2 + \theta^2)R_{\tau}(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)]$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}[(\tau^2 + \theta^2)R_{\theta}(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)]$ sont paires en chaque variable et intégrables sur \mathbb{R}^2 et on a

$$I_2(L_{\alpha} + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 2 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} \frac{\partial}{\partial \tau} ((\tau^2 + \theta^2)R_{\tau}(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)) (\tau, \theta) d\tau d\theta \\ - 2 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} \frac{\partial}{\partial \theta} ((\tau^2 + \theta^2)R_{\theta}(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)) (\tau, \theta) d\tau d\theta.$$

On obtient la deuxième relation car $\mathcal{M}f_2$ est nulle au voisinage des points $(0, \theta) \in \{0\} \times \mathbb{R}^*$. \blacksquare

Proposition 5.2.3. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on a

$$I_{\mathfrak{m}}(L_1 + L_2, \Psi_{\mathfrak{m}}, \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}) + 2I_2(L_{\alpha} + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0.$$

2. Pour tout $\tau > 0$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta}(\Psi_{\mathfrak{m}})_r(\tau, 0^+) - \frac{\partial}{\partial \theta}\Psi_2(\tau, 0^+) = 0 \\ \Psi_2(\tau, 0^+) = 0 \end{cases}.$$

3. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ et pour tout $\tau > 0$, on a

$$R_{\theta}((\Psi_{\mathfrak{m}})_r, (\mathcal{M}f_{\mathfrak{m}})_r)(\tau, 0^+) - R_{\theta}(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)(\tau, 0^+) = 0.$$

Preuve : On suppose l'assertion 1. vérifiée. Par les lemmes 5.2.2 et 5.2.3, pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on a donc

$$-\int_0^{+\infty} \tau^2 R_\theta((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)(\tau, 0^+) d\tau + \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\theta(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)(\tau, 0^+) d\tau = 0.$$

Par surjectivité de l'application $f \mapsto G_f$ de $\mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ dans \mathcal{H}_Y^{pair} (théorème 3.4.1), l'assertion 1. est donc équivalente à

$$\int_0^{+\infty} \tau^2 \left[a(\tau, 0) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\Psi_m)_r - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} \right) (\tau, 0^+) + b(\tau, 0) \Psi_2(\tau, 0^+) \right] d\tau = 0$$

ceci pour tout a et b dans $\mathcal{D}((\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\})$ paires par rapport à la première variable.

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ quelconque. Il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $\text{supp}(\chi)$ soit inclus dans $[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi \equiv 1$ sur $[-\varepsilon^2/2; \varepsilon^2/2]$ et $\phi \equiv 0$ sur $\mathbb{R} - [-\varepsilon^2; \varepsilon^2]$.

En prenant la fonction $a(t, w)$ nulle et $b(t, w)$ définie par $b(t, w) = \frac{\chi(t) + \chi(-t)}{t^2} (1 - \phi(t^2 - w)) \phi(w)$, on obtient $b(\tau, 0) = \frac{1}{\tau^2} \chi(\tau)$ pour $\tau > 0$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \chi(\tau) \Psi_2(\tau, 0^+) d\tau = 0.$$

Cette dernière égalité étant vraie pour toute fonction χ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$, alors

$$\Psi_2(\tau, 0^+) = 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_+^*.$$

Maintenant, en prenant la fonction $a(t, w) = \frac{\chi(t) + \chi(-t)}{t^2} (1 - \phi(t^2 - w)) \phi(w)$ et la fonction $b(t, w)$ nulle, nous obtenons alors

$$\int_0^{+\infty} \chi(\tau) \left(\frac{\partial (\Psi_m)_r}{\partial \theta}(\tau, 0^+) - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(\tau, 0^+) \right) d\tau = 0.$$

Cette dernière égalité est vraie pour toute fonction χ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$, ainsi on a

$$\frac{\partial (\Psi_m)_r}{\partial \theta}(\tau, 0^+) - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(\tau, 0^+) = 0.$$

Ceci donne l'implication 1. \Rightarrow 2.

Maintenant on suppose que $\Psi_2(\tau, 0^+) = 0$ et $\frac{\partial (\Psi_m)_r}{\partial \theta}(\tau, 0^+) - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(\tau, 0^+) = 0$. Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. Nous avons les propriétés

$$(\mathcal{M}f_m)_r(\tau, 0^+) = \mathcal{M}f_2(\tau, 0^+), \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathcal{M}f_m)_r(\tau, 0^+) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{M}f_2(\tau, 0^+) \text{ est finie.}$$

Les hypothèses sur Ψ_2 et Ψ_m donne alors

$$\begin{aligned} & R_\theta(\Psi_2, \mathcal{M}f_2)(\tau, 0^+) - R_\theta((\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)(\tau, 0^+) \\ &= -\frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(\tau, 0^+) \mathcal{M}f_2(\tau, 0^+) + \frac{\partial (\Psi_m)_r}{\partial \theta}(\tau, 0^+) (\mathcal{M}f_m)_r(\tau, 0^+) = 0, \end{aligned}$$

d'où l'implication 2. \Rightarrow 3.

L'implication 3. \Rightarrow 1. est immédiate par les lemmes 5.2.2 et 5.2.3. ■

Nous décrivons maintenant l'espace des fonctions Ψ_m et Ψ_2 satisfaisant les assertions de la proposition 5.2.3.

Pour $k \in \{1, 2\}$, on note

$$A_{1, \lambda_k}(z) = \Phi_{\lambda_k}(z) \quad \text{et} \quad A_{2, \lambda_k}(z) = W_{\lambda_k}(z) = w_{\lambda_k}(z) + \log(z) \Phi_{\lambda_k}(z),$$

le système fondamental de solutions de $L_c y = \lambda_k y$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ (proposition 4.2.1).

La restriction de ces fonctions à \mathbb{R}_+^* est un système fondamental de solution de $Ly = \lambda_k y$ sur \mathbb{R}_+^* c'est-à-dire, pour $t > 0$, on a $W_{\lambda_k}^r(t) = W_{\lambda_k}(t)$. On omettra l'exposant "r" dans la suite de ce paragraphe.

Lemme 5.2.4. *Sur \mathbb{R}_+^* , la famille de fonctions $\{(A_{i, \lambda_1} A_{j, \lambda_2})(t)\}_{1 \leq i, j \leq 2}$ est libre.*

Preuve : Soit $\alpha_{i, j} \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $t > 0$, l'on ait $\sum_{1 \leq i, k \leq 2} \alpha_{i, j} A_{i, \lambda_1}(t) A_{j, \lambda_2}(t) = 0$. Cette relation s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & [\alpha_{1,1} \Phi_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2} + \alpha_{1,2} \Phi_{\lambda_1} w_{\lambda_2} + \alpha_{2,1} w_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2} + \alpha_{2,2} w_{\lambda_1} w_{\lambda_2}](t) \\ & + \log(t) [(\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1}) \Phi_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2} + \alpha_{2,2} (\Phi_{\lambda_1} w_{\lambda_2} + w_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2})](t) + \log(t)^2 \alpha_{2,2} \Phi_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2}(t) = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions Φ_{λ_k} et w_{λ_k} sont continues et non nulles en 0. Ainsi, on obtient aisément

$$\alpha_{2,2} = \alpha_{1,2} + \alpha_{2,1} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{1,1} \Phi_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2} + \alpha_{1,2} (\Phi_{\lambda_1} w_{\lambda_2} - w_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_2}) = 0.$$

Comme $w_{\lambda_1}(0) = w_{\lambda_2}(0) = 2\gamma$ où γ est la constante d'Euler et $\Phi_{\lambda_1}(0) = \Phi_{\lambda_2}(0) = 1$, on obtient $\alpha_{1,1} = 0$.

Par ailleurs, comme $w_{\lambda_k}(t) = 2\gamma + (1 + 2\gamma) \frac{\lambda_k t}{4} + o_{t \rightarrow 0^+}(t)$ et $\Phi_{\lambda_k}(t) = 1 + \frac{\lambda_k t}{4} + o_{t \rightarrow 0^+}(t)$, on a $\Phi_{\lambda_1}(t) w_{\lambda_2}(t) - \Phi_{\lambda_2}(t) w_{\lambda_1}(t) = \frac{t}{4}(\lambda_2 - \lambda_1) + o_{t \rightarrow 0^+}(t)$ ce qui donne $\alpha_{1,2} = 0$. ■

Corollaire 5.2.2. *Les fonctions Ψ_m et Ψ_2 satisfont l'une des conditions équivalentes de la proposition 5.2.3 si et seulement si il existe $\Psi^+ \in \text{Vect}\langle S^+(A, B); (A, B) \in \text{Sol}(L, \lambda_1) \times \text{Sol}(L, \lambda_2) \rangle$ et $\Psi_c \in \text{Vect}\langle [A, B]; (A, B) \in \text{Sol}(L_c, \lambda_1) \times \text{Sol}(L_c, \lambda_2) \rangle$ telles que*

pour $t_1 > t_2 > 0$ alors $\Psi_m(t_1, t_2) = \Psi^+(t_1, t_2) + \imath \Psi_c(t_1, t_2)$
pour $\tau > 0$ et $\theta > 0$ alors $\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c((\tau + \imath\theta)^2, (\tau - \imath\theta)^2)$

Preuve : Par la proposition 4.2.4, il existe des nombres complexes $\alpha_{i,j}$ et $\beta_{i,j}$ tels que $\Psi_c(z_1, z_2) = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \alpha_{i,j} A_{i,\lambda_1}(z_1) A_{j,\lambda_2}(z_2) + \beta_{i,j} A_{i,\lambda_1}(z_2) A_{j,\lambda_2}(z_1)$. Ainsi, pour $\tau > 0$, la condition $\Psi_2(\tau, 0) = 0$ implique que,

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 2} (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) A_{i,\lambda_1}(\tau^2) A_{j,\lambda_2}(\tau^2) = 0.$$

Par le lemme précédent, on obtient donc $\alpha_{i,j} + \beta_{i,j} = 0$ pour $1 \leq i, j \leq 2$ et par suite

$$\Psi_c(z_1, z_2) = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \alpha_{i,j} (A_{i,\lambda_1}(z_1) A_{j,\lambda_2}(z_2) - A_{i,\lambda_1}(z_2) A_{j,\lambda_2}(z_1)).$$

Etudions à présent les conséquences de la condition $\frac{\partial}{\partial \theta}(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) - \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_2(\tau, 0^+) = 0$.

Par la proposition 4.2.2, il existe des nombres complexes $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ tels que pour $\tau > \theta \geq 0$, on ait :

$$(\Psi_m)_r(\tau, \theta) = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} a_{i,j} A_{i,\lambda_1}((\tau + \theta)^2) A_{j,\lambda_2}((\tau - \theta)^2) + \sum_{1 \leq i,j \leq 2} b_{i,j} A_{i,\lambda_1}((\tau - \theta)^2) A_{j,\lambda_2}((\tau + \theta)^2).$$

On obtient donc

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) = 2\tau \sum_{1 \leq i,j \leq 2} (a_{i,j} - b_{i,j}) (A'_{i,\lambda_1}(\tau^2) A_{j,\lambda_2}(\tau^2) - A_{i,\lambda_1}(\tau^2) A'_{j,\lambda_2}(\tau^2))$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_2(\tau, 0^+) = 4\imath \tau \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \alpha_{i,j} (A'_{i,\lambda_1}(\tau^2) A_{j,\lambda_2}(\tau^2) - A_{i,\lambda_1}(\tau^2) A'_{j,\lambda_2}(\tau^2)).$$

La condition $\frac{\partial}{\partial \theta}(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) - \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_2(\tau, 0^+) = 0$ donne alors, pour $t > 0$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 2} (a_{i,j} - b_{i,j} - 2\imath \alpha_{i,j}) (A'_{i,\lambda_1} A_{j,\lambda_2} - A_{i,\lambda_1} A'_{j,\lambda_2})(t) = 0.$$

En dérivant cette expression, on obtient

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 2} (a_{i,j} - b_{i,j} - 2\imath \alpha_{i,j}) (A''_{i,\lambda_1} A_{j,\lambda_2} - A_{i,\lambda_1} A''_{j,\lambda_2})(t) = 0.$$

Ainsi, pour $L = 4(t \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t})$ et pour tout $t > 0$, nous avons

$$0 = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} (a_{i,j} - b_{i,j} - 2\imath \alpha_{i,j}) ([L A_{i,\lambda_1}] A_{j,\lambda_2} - A_{i,\lambda_1} [L A_{j,\lambda_2}])(t)$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq 2} (a_{i,j} - b_{i,j} - 2i\alpha_{i,j})(\lambda_1 - \lambda_2)A_{i,\lambda_1}A_{j,\lambda_2}(t).$$

Le lemme 5.2.4 donne alors $a_{i,j} - b_{i,j} - 2i\alpha_{i,j} = 0$ pour $1 \leq i, j \leq 2$. Ceci permet d'obtenir l'expression suivante de Ψ_m pour $t_1 > t_2 > 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_m(t_1, t_2) &= \sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{i,j}A_{i,\lambda_1}(t_1)A_{j,\lambda_2}(t_2) + b_{i,j}A_{i,\lambda_1}(t_2)A_{j,\lambda_2}(t_1) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{a_{i,j} + b_{i,j}}{2} (A_{i,\lambda_1}(t_1)A_{j,\lambda_2}(t_2) + A_{i,\lambda_1}(t_2)A_{j,\lambda_2}(t_1)) + i\Psi_c(t_1, t_2). \end{aligned}$$

ce qui donne les expressions de Ψ_2 et Ψ_m voulues. La réciproque est immédiate par simple calcul. ■

Proposition 5.2.4. *On suppose qu'il existe $\Psi^+ \in Vect\langle S^+(A, B); (A, B) \in Sol(L, \lambda_1) \times Sol(L, \lambda_2) \rangle$ et $\Psi_c \in Vect[A, B]; (A, B) \in Sol(L_c, \lambda_1) \times Sol(L_c, \lambda_2) \rangle$ telles que*

$$\begin{aligned} \text{pour } t_1 > t_2 > 0 \text{ alors } \Psi_m(t_1, t_2) &= \Psi^+(t_1, t_2) + i\Psi_c(t_1, t_2) \\ \text{pour } \tau > 0 \text{ et } \theta > 0 \text{ alors } \Psi_2(\tau, \theta) &= \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2) \end{aligned}$$

Alors, pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, on a

$$I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) + 2I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0.$$

Preuve : Soit $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. Il existe deux fonctions a et b de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\})$ paires en la première variable telles que :
pour $\tau > \theta \geq 0$, alors $(\mathcal{M}f_m)_r(\tau, \theta) = a(\tau, \theta^2)$
et pour $\tau > 0$ et $\theta \geq 0$ alors $\mathcal{M}f_2(\tau, \theta) = a(\tau, -\theta^2) + \theta b(\tau, -\theta^2)$.

On procède comme dans la preuve du lemme 5.2.3. On rappelle que $I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) = I_m^r(((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)$.

On considère tout d'abord $D = L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2}$ et $(g, h) = ((\Psi_m)_r, D(\mathcal{M}f_m)_r)$ ou $(D(\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)$. Par l'expression des L_{α_j} pour $j = 1, 2$, on a d'une part

$$L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\theta}{\tau^2 - \theta^2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\tau}{\tau^2 - \theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

et d'autre part, pour A et B deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et pour $(\tau, \theta) \in U$ avec $\tau^2 \neq \theta^2$, on a la relation suivante

$$|\tau^2 - \theta^2| (A(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(B) - A(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(B))(\tau, \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (|\tau^2 - \theta^2| R_\tau(A, B)) (\tau, \theta) + \frac{\partial}{\partial \tau} (|\tau^2 - \theta^2| R_\theta(A, B)) (\tau, \theta) \right].$$

Les remarques 5.2.5 et 5.2.6 assurent l'intégrabilité des deux fonctions $\frac{\partial}{\partial \tau} (|\tau^2 - \theta^2| R_\theta(g, h)) (\tau, \theta)$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} (|\tau^2 - \theta^2| R_\tau(g, h)) (\tau, \theta)$ sur \mathbb{R}_+^2 . Comme $D(\mathcal{M}f_m)_r$ et $D(\Psi_m)_r$ sont impaires en chaque variable, la fonction $g(Dh) - (Dg)h$ est paire en chaque variable. On obtient alors

$$I_m^r(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2}, g, h) = 2 \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta > 0}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} (|\tau^2 - \theta^2| R_\theta(g, h)) (\tau, \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (|\tau^2 - \theta^2| R_\tau(g, h)) (\tau, \theta) \right) d\tau d\theta.$$

puis, en utilisant la symétrie des fonctions g et h ,

$$\begin{aligned} I_m^r(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2}, g, h) &= -2 \int_0^{+\infty} \theta^2 R_\theta(g, h)(0^+, \theta) d\theta - 2 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\tau(g, h)(\tau, 0^+) d\theta \\ &= -4 \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\tau(g, h)(\tau, 0^+) d\theta \end{aligned}$$

Pour $\tau > \theta \geq 0$ on a $(\mathcal{M}f_m)_r(\tau, \theta) = a(\tau, \theta^2)$. Ainsi la fonction $h = (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\mathcal{M}f_m)_r$ vérifie $h(\tau, 0^+) = \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, 0^+) = 0$ pour tout $\tau > 0$ et donc $I_m^r(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2}, (\Psi_m)_r, (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\mathcal{M}f_m)_r) = 0$. On en déduit l'égalité suivante.

$$\begin{aligned} I_m^r((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) &= I_m^r(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2}, (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) \\ &= -4 \int_0^{+\infty} \tau^2 [(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) \frac{\partial}{\partial \tau} a(\tau, 0) - \frac{\partial}{\partial \tau} [(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r](\tau, 0^+) a(\tau, 0)] d\tau. \end{aligned}$$

Considérons maintenant $D = L_\alpha - L_{\bar{\alpha}}$ et $(g, h) = (\Psi_2, D\mathcal{M}f_2)$ ou $(g, h) = (D\Psi_2, \mathcal{M}f_2)$. De même que précédemment, on a

$$L_\alpha - L_{\bar{\alpha}} = -i \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{\theta}{\tau^2 + \theta^2} \frac{\partial}{\partial \tau} - i \frac{\tau}{\tau^2 + \theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

et pour A et B deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et pour $(\tau, \theta) \in U$ avec $\tau^2 \neq \theta^2$, on a la relation suivante

$$\begin{aligned} &(\tau^2 + \theta^2) (A(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})(B) - A(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})(B)) (\tau, \theta) \\ &= \frac{-i}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} ((\tau^2 + \theta^2) R_\tau(A, B)) (\tau, \theta) + \frac{\partial}{\partial \tau} ((\tau^2 + \theta^2) R_\theta(A, B)) (\tau, \theta) \right]. \end{aligned}$$

Les remarques 5.2.5 et 5.2.6 et les propriétés de parité des fonctions considérées assurent l'intégrabilité des deux fonctions

$\frac{\partial}{\partial \tau} ((\tau^2 + \theta^2)R_\theta(g, h))(\tau, \theta)$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} ((\tau^2 + \theta^2)R_\tau(g, h))(\tau, \theta)$ sur \mathbb{R}^2 ce qui permet d'obtenir

$$I_2(D, g, h) = 2i \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\tau(g, h)(\tau, 0^+) d\tau + 2i \int_0^\infty \theta^2 R_\theta(g, h)(0^+, \theta) d\theta.$$

Pour $(\tau, \theta) \in \mathbb{R}_+^2$, on a $\mathcal{M}f_2(\tau, \theta) = a(\tau, -\theta^2) + \theta b(\tau, -\theta^2)$ avec $a, b \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cap \{(\tau, w); \tau^2 > w\})$. En particulier, on a $R_\theta(g, h)(0^+, \theta) = 0$ pour $\theta > 0$ et par suite

$$I_2(D, g, h) = 2i \int_0^{+\infty} \tau^2 R_\tau(g, h)(\tau, 0^+) d\tau.$$

Par hypothèse, il existe une fonction $\Psi_c \in Vect\langle [A, B]; (A, B) \in Sol(L_c, \lambda_1) \times Sol(L_c, \lambda_2) \rangle$ telle que, pour $\tau > 0$ et $\theta > 0$ alors $\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$. On a donc $\Psi_2(\tau, 0^+) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_2(\tau, 0^+) = 0$ ce qui donne $R_\tau(\Psi_2, (L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\mathcal{M}f_2)(\tau, 0^+) = 0$, et par suite

$$\begin{aligned} I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) &= I_2(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}}, (L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2, \mathcal{M}f_2) \\ &= 2i \int_0^\infty \tau^2 [(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2(\tau, 0^+) \frac{\partial}{\partial \tau} a(\tau, 0) - \frac{\partial}{\partial \tau} [(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2](\tau, 0^+) a(\tau, 0)] d\tau. \end{aligned}$$

Par hypothèse, la fonction Ψ_m est donnée par $\Psi_m(t_1, t_2) = (\Psi^+ + i\Psi_c)(t_1, t_2)$ pour $t_1 > t_2 > 0$ avec $\Psi^+ \in Vect\langle S^+(A, B); (A, B) \in Sol(L, \lambda_1) \times Sol(L, \lambda_2) \rangle$. Par ailleurs, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r &= ((L_1 - L_2)\Psi_m)_r = ((L_1 - L_2)\Psi^+)_r + i((L_{1,c} - L_{2,c})\Psi_c)_r \\ (L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2(\tau, \theta) &= ((L_{1,c} - L_{2,c})\Psi_c)((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2) \text{ pour } (\tau, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} (L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r(\tau, 0^+) &= i(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2(\tau, 0^+) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} [(L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})(\Psi_m)_r](\tau, 0^+) &= i \frac{\partial}{\partial \tau} [(L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})\Psi_2](\tau, 0^+). \end{aligned}$$

Grâce aux expressions obtenues précédemment de $I_m^r((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r)$ et $I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2)$, on en déduit

$$I_m^r((L_{\alpha_1} - L_{\alpha_2})^2, (\Psi_m)_r, (\mathcal{M}f_m)_r) + 2I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0.$$

■

5.2.3 Recollement sur $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$

En utilisant l'isomorphisme ϖ et les résultats du paragraphe précédent, nous étudions à présent les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions $\Psi_{\mathfrak{m}}$ et Ψ_2 vérifient les relations (*Rec*) pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$.

Pour $P \in \mathbb{C}[Q, S]$ et $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, on a de manière immédiate

$$\begin{aligned} \langle \partial(P)T_{\Phi}, f \rangle - \langle T_{\partial(P)\Phi}, f \rangle &= \int_{\mathfrak{q}} [\Phi(X)\partial(P)f(X) - \partial(P)\Phi(X)f(X)]dX \\ &= \int_{\mathfrak{q}} [\Phi \circ \varpi(X)(\partial(P)f) \circ \varpi(X) - (\partial(P)\Phi) \circ \varpi(X)f \circ \varpi(X)]dX. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour toute application g de classe \mathcal{C}^∞ sur un ouvert de \mathfrak{q} , on a

$$\partial(Q)(g \circ \varpi) = -\partial(Q)(g) \circ \varpi$$

et

$$\partial(S)(g \circ \varpi) = \partial(S)(g) \circ \varpi.$$

Ainsi, comme Φ est solution du système (E_χ) sur \mathfrak{q}^{reg} , la fonction $\Phi \circ \varpi$ est solution du système (E_{χ^-}) sur \mathfrak{q}^{reg} où χ^- est le caractère de $\mathbb{C}[Q, S_0]$ déterminé par $\chi^-(Q) = -\chi(Q) = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $\chi^-(S_0) = \chi(S_0) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$.

D'autre part, comme $|\delta|$ est ϖ -invariant, on a $|\delta|(\Phi \circ \varpi) = (|\delta|\Phi) \circ \varpi = \tilde{\Psi} \circ \varpi$.

On remarque que les fonctions u et v caractérisant les orbites semi-simples (avec $u + v = Q$ et $uv = S$) satisfont les relations suivantes :

$$\begin{cases} u \circ \varpi(X) = -v(X) \text{ pour } X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg} \\ \begin{cases} u \circ \varpi(X_{\tau, \theta}) = u(X_{\theta, \tau}) \\ v \circ \varpi(X_{\tau, \theta}) = v(X_{\theta, \tau}) \end{cases} \text{ pour } X_{\tau, \theta} \in \mathfrak{a}_2^{reg} \end{cases}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{cases} \tilde{\Psi} \circ \varpi(X) = \Psi_{\mathfrak{m}}(-v(X), -u(X)) = \Psi_{\mathfrak{m}}(-u(X), -v(X)) \text{ pour } X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg} \\ \tilde{\Psi} \circ \varpi(X_{\tau, \theta}) = \tilde{\Psi}(X_{\theta, \tau}) = \Psi_2(\theta, \tau) = \Psi_2(\pm\theta, \pm\tau), \text{ pour } X_{\tau, \theta} \in \mathfrak{a}_2. \end{cases}$$

On introduit alors les fonctions $\check{\Psi}_{\mathfrak{m}}$ et $\check{\Psi}_2$ définies par

$$\begin{aligned} \check{\Psi}_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) &= \Psi_{\mathfrak{m}}(-t_1, -t_2) && \text{pour } (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (t_1 - t_2)t_1t_2 \neq 0 \\ \check{\Psi}_2(\tau, \theta) &= \Psi_2(\theta, \tau) && \text{pour } (\tau, \theta) \in (\mathbb{R}^*)^2 \end{aligned}$$

de telle sorte que $(|\delta|\Phi \circ \varpi)_{\mathfrak{m}} = \check{\Psi}_{\mathfrak{m}}$ et $(|\delta|\Phi \circ \varpi)_2 = \check{\Psi}_2$.

Par ailleurs, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$, on a $\mathcal{M}_H(f \circ \varpi) = \mathcal{M}_H(f) \circ \varpi$ et $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$ si et seulement si $f \circ \varpi \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$. On obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 5.2.3. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. La fonction Φ , solution du système (E_χ) sur \mathfrak{q}^{reg} , vérifie $\langle \partial(P)T_\Phi, f \rangle - \langle T_{\partial(P)\Phi}, f \rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$ et $P \in \mathbb{C}[Q, S_0]$,
2. Les fonctions Ψ_m et Ψ_2 vérifient les relations $(\mathcal{R}ec)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$,
3. Les fonctions $\check{\Psi}_m$ et $\check{\Psi}_2$ vérifient les relations $(\mathcal{R}ec)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$.

La proposition 5.2.3 permet alors d'obtenir le résultat suivant :

Corollaire 5.2.4. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$, on a

$$I_m(L_1 + L_2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) + 2I_2(L_\alpha + L_{\bar{\alpha}}, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0.$$

2. Pour tout $\tau > 0$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta}(\check{\Psi}_m)_r(\tau, 0^+) - \frac{\partial}{\partial \theta}\check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = 0 \\ \check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = 0 \end{cases}.$$

3. Pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$ et pour tout $\tau > 0$, on a

$$R_\theta((\check{\Psi}_m)_r, (\mathcal{M}(f \circ \varpi)_m)_r)(\tau, 0^+) - R_\theta(\check{\Psi}_2, \mathcal{M}(f \circ \varpi)_2)(\tau, 0^+) = 0.$$

Comme la fonction $\Phi \circ \varpi$ est solution du système (E_{χ^-}) sur \mathfrak{q}^{reg} , on obtient alors grâce au corollaire 5.2.2 et à la proposition 5.2.4 :

Corollaire 5.2.5. 1. Les fonctions Ψ_m et Ψ_2 satisfont l'une des conditions équivalentes du corollaire 5.2.4 précédent si et seulement si il existe $\Psi_{\chi^-}^+ \in Vect\langle S^+(A, B); (A, B) \in Sol(L, -\lambda_1) \times Sol(L, -\lambda_2) \rangle$ et $\Psi_{c, \chi^-} \in Vect\langle [A, B]; (A, B) \in Sol(L_c, -\lambda_1) \times Sol(L_c, -\lambda_2) \rangle$ telles que

$$\begin{aligned} \text{pour } t_1 > t_2 > 0 \text{ alors } \Psi_m(-t_1, -t_2) &= \check{\Psi}_m(t_1, t_2) = \Psi_{\chi^-}^+(t_1, t_2) + \imath \Psi_{c, \chi^-}(t_1, t_2) \\ \text{pour } \tau > 0 \text{ et } \theta > 0 \text{ alors } \Psi_2(\theta, \tau) &= \check{\Psi}_2(\tau, \theta) = \Psi_{c, \chi^-}((\tau + \imath \theta)^2, (\tau - \imath \theta)^2) \end{aligned}.$$

2. Dans ce cas, pour tout $f \in \mathcal{D}(H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+))$, on a

$$I_m((L_1 - L_2)^2, \Psi_m, \mathcal{M}f_m) + 2I_2((L_\alpha - L_{\bar{\alpha}})^2, \Psi_2, \mathcal{M}f_2) = 0.$$

5.2.4 Recollement sur \mathcal{U}

La synthèse des résultats des trois paragraphes précédents nous permet de donner maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions Ψ_m et Ψ_2 vérifient les relations $(\mathcal{R}ec)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. Nous gardons les notations $\check{\Psi}_m$ et $\check{\Psi}_2$ du paragraphe précédent.

Commençons par rechercher les fonctions Ψ_2 compatibles avec les résultats des corollaires 5.2.2 et 5.2.5.

Proposition 5.2.5. *La fonction Ψ_2 satisfait, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^*$, les relations*

$$\begin{cases} \Psi_2(\tau, 0^+) = 0 \\ \check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = \Psi_2(0^+, \tau) = 0 \end{cases}$$

si et seulement si il existe $\Psi_c \in Vect\langle [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], [\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + [W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}] \rangle$ telle que, pour tout $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^)^2$, on ait $\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$.*

Preuve : Par le corollaire 5.2.2, la condition $\Psi_2(\tau, 0^+) = 0$ implique qu'il existe Ψ_c dans $Vect\langle [A, B]; (A, B) \in \mathcal{Sol}(L_c, \lambda_1) \times \mathcal{Sol}(L_c, \lambda_2) \rangle$ telle que , pour tout $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on ait $\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$.

Ainsi, on veut déterminer les fonctions Ψ_c de cette forme telles que, pour tout $\tau > 0$, on ait

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \Psi_c((\theta + i\tau)^2, (\theta - i\tau)^2) = 0.$$

On remarque que lorsque A et B sont des fonctions analytiques sur \mathbb{C} , alors, pour $\tau > 0$, on a $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} [A, B]((\theta + i\tau)^2, (\theta - i\tau)^2) = 0$. Pour $\tau > 0$, on a $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \log((\theta + i\tau)^2) = \log(\tau^2) + i\pi$ et $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \log((\theta - i\tau)^2) = \log(\tau^2) - i\pi$, Ainsi, en posant $z = (\theta + i\tau)^2$, pour $\tau > 0$, on obtient

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} [A, \log(\cdot)B](z, \bar{z}) = - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} [\log(\cdot)A, B](z, \bar{z}) = -2i\pi A(-\tau^2)B(-\tau^2)$$

$$\text{et} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0^+} [\log(\cdot)A, \log(\cdot)B](z, \bar{z}) = 0.$$

Ainsi, la fonction Ψ_2 paire par rapport à chaque variable, définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $\Psi_2(\tau, \theta) = [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}]((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$ vérifie donc la condition $\check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = 0$.

Considérons $\Psi_c = \alpha_{12}[\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + \alpha_{21}[W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}] + \alpha_{22}[W_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}]$. On a donc

$$\begin{aligned} \Psi_c &= \alpha_{12}([\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [\Phi_{\lambda_1}, \log(\cdot)\Phi_{\lambda_2}]) + \alpha_{21}([w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}] + [\log(\cdot)\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}]) \\ &+ \alpha_{22}([w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [\log(\cdot)\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [w_{\lambda_1}, \log(\cdot)\Phi_{\lambda_2}] + [\log(\cdot)\Phi_{\lambda_1}, \log(\cdot)\Phi_{\lambda_2}]) \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \check{\Psi}_2(\tau, 0^+) &= -2i\pi(\alpha_{12} - \alpha_{21})\Phi_{\lambda_1}(-\tau^2)\Phi_{\lambda_2}(-\tau^2) \\ &- 2i\pi\alpha_{22}(w_{\lambda_1}(-\tau^2)\Phi_{\lambda_2}(-\tau^2) - w_{\lambda_2}(-\tau^2)\Phi_{\lambda_1}(-\tau^2)). \end{aligned}$$

Comme $w_{\lambda_k}(t) = 2\gamma + (1 + 2\gamma)\lambda_k t/4 + o_{t \rightarrow 0^-}(t)$ et $\Phi_{\lambda_k}(t) = 1 + \lambda_k t/4 + o_{t \rightarrow 0^-}(t)$ la condition $\check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = 0$ donne $\alpha_{12} - \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$, et donc $\Psi_c = \alpha_{1,2}([\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + [W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])$.

Finalement, les conditions $\Psi_2(\tau, 0^+) = \check{\Psi}_2(\tau, 0^+) = 0$ implique $\Psi_c \in Vect\langle [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], [\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + [W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}] \rangle$. La réciproque est immédiate. ■

Remarque 5.2.7. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les solutions fondamentales Φ_λ et $W_\lambda = w_\lambda + \log(\cdot)\Phi_\lambda$ de $Sol(L_c, \lambda)$ vérifient, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$,

$$\Phi_\lambda(-z) = \Phi_{-\lambda}(z) \quad \text{et} \quad w_\lambda(-z) = w_{-\lambda}(z).$$

Par suite, pour $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C} - \mathbb{R})^2$, on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} & [\Phi_{-\lambda_1}, \Phi_{-\lambda_2}](z_1, z_2) = [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](-z_1, -z_2), \\ & ([\Phi_{-\lambda_1}, W_{-\lambda_2}] + [W_{-\lambda_1}, \Phi_{-\lambda_2}])(z_1, z_2) \\ &= ([\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])(-z_1, -z_2) + \log(z_1 z_2) [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](-z_1, -z_2). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\Psi_c \in Vect\langle [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], [\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + [W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}] \rangle$, la fonction Ψ_2 paire en chaque variable définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi_c((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$ vérifie

$$\check{\Psi}_2(\tau, \theta) = \Psi_{c, \chi^-}((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$$

où $\Psi_{c, \chi^-} \in Vect\langle [A, B]; (A, B) \in Sol(L_c, -\lambda_1) \times Sol(L_c, -\lambda_2) \rangle$ satisfait $\Psi_{c, \chi^-}(z_1, z_2) = -\Psi_c(-z_1, -z_2)$ sur $(\mathbb{C} - \mathbb{R})^2$. Le résultat du lemme précédent est donc compatible avec celui du corollaire 5.2.5.

Définition 5.2.4. On définit la fonction $\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}$ sur $(\mathbb{C}^*)^2$ par

$$\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}(z_1, z_2) = ([\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])(z_1, z_2) + \log |z_1 z_2| [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](z_1, z_2)$$

de telle sorte que

1. $\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}(z, \bar{z}) = ([\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}] + [W_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])(z, \bar{z})$, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}(t_1, t_2) = ([\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}^r] + [W_{\lambda_1}^r, \Phi_{\lambda_2}])(t_1, t_2)$, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

Théorème 5.2.1. Les fonctions Ψ_m et Ψ_2 vérifient les conditions (Rec) pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ si et seulement si il existe

1. $\Psi^+ \in Vect\langle S^+(A, B); (A, B) \in Sol(L, \lambda_1) \times Sol(L, \lambda_2) \rangle$
2. $\Psi^- \in Vect\langle [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], \mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2} \rangle$

telles que, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - \text{diag}$ et $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on ait les relations

$$\begin{aligned} \Psi_m(t_1, t_2) &= \Psi^+(t_1, t_2) + i \text{signe}(t_1 - t_2) \Psi^-(t_1, t_2) \\ \text{et} \quad \Psi_2(\tau, \theta) &= \Psi^-((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2). \end{aligned}$$

Preuve : On suppose tout d'abord que Ψ_m et Ψ_2 vérifient les conditions (Rec) pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. Par la proposition 5.2.2 et le corollaire 5.2.4, on a $\Psi_2(\tau, 0^+) = \Psi_2(0^+, \tau) = 0$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}^*$. La proposition 5.2.5 donne alors l'existence de $\Psi^- \in Vect\langle [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], \mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2} \rangle$ telle que pour tout $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on ait $\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi^-((\tau + i\theta)^2, (\tau - i\theta)^2)$. Par les

corollaires 5.2.1 et 5.2.2 et les propriétés de symétries de Ψ_m , il existe $\Psi^+ \in Vect\langle S^+(A, B); (A, B) \in Sol(L, \lambda_1) \times Sol(L, \lambda_2) \rangle$ telle que, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - diag$, on ait $\Psi_m(t_1, t_2) = \Psi^+(t_1, t_2) + \imath signe(t_1 - t_2)\Psi^-(t_1, t_2)$. Maintenant les propriétés des fonctions $[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}]$ et $\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}$ montrent que les fonctions Ψ_m et Ψ_2 satisfont alors les propriétés du corollaire 5.2.5.

Réciproquement, on suppose que les fonctions Ψ_m et Ψ_2 sont données par $\Psi_m(t_1, t_2) = \Psi^+(t_1, t_2) + \imath signe(t_1 - t_2)\Psi^-(t_1, t_2)$, pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^*)^2 - diag$ et par $\Psi_2(\tau, \theta) = \Psi^-((\tau + \imath\theta)^2, (\tau - \imath\theta)^2)$, pour tout $(\tau, \theta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ où $\Psi^+ \in Vect\langle S^+(A, B); (A, B) \in Sol(L, \lambda_1) \times Sol(L, \lambda_2) \rangle$ et $\Psi^- \in Vect\langle [\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}], \mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2} \rangle$. Ainsi, les résultats des paragraphes précédents assurent que les fonctions Ψ_m et Ψ_2 satisfont les relations $(\mathcal{R}ec)$ pour toute fonction g dont le support est contenu soit dans $H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ (corollaire 5.2.1 et proposition 5.2.2), soit dans $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ (corollaire 5.2.2 et proposition 5.2.4), ou encore dans $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ (corollaire 5.2.5).

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. Comme $\mathcal{U} = H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \cup H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+ \cup H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$, le théorème de partition de l'unité assure l'existence de fonctions φ_m , φ_3 et φ_3^- de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathfrak{q} telles que : (a) $Support(\varphi_m) \subset H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, $Support(\varphi_3) \subset H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$, et $Support(\varphi_3^-) \subset H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$,

(b) $\mathbf{1}_{supp(f)} \leq \varphi_m + \varphi_3 + \varphi_3^- \leq 1$.

Ainsi, on a $f = \varphi_m f + \varphi_3 f + \varphi_3^- f$ et par suite Ψ_m et Ψ_2 satisfont les relations $(\mathcal{R}ec)$ pour la fonction f par ce qui précède. ■

Remarque 5.2.8. *L'expression de la fonction Ψ_2 dépendait jusqu'à présent du choix de la détermination du logarithme choisie pour décrire le système fondamental de solutions de $Sol_{L_c, \lambda}$ à travers la fonction Ψ_c . L'expression obtenue pour Ψ_2 dans le théorème ci-dessus en terme de la fonction $\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}$ montre qu'elle est indépendante de ce choix.*

Soient Ψ_m et Ψ_2 satisfaisant les hypothèses du théorème précédent. Les fonctions $\tilde{\Psi}$ et $\Phi = \tilde{\Psi}/|\delta|$ s'expriment alors de la manière suivante en terme des fonctions u et v , qui caractérisent les orbites semi-simples. On rappelle que ces fonctions satisfont les relations suivantes : $u(X) + v(X) = Q(X) = \frac{1}{2}tr(X^2)$, $u(X)v(X) = S(X) = det(X)$ et $u(X) - v(X) = \delta(X)$. Comme pour $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, on a $u(X) - v(X) = \delta(X) = |\delta(X)| \geq 0$ et pour $X \in \mathfrak{a}_2$, on a $|\delta|(X) = -\imath\delta(X)$ et $u(X) = \overline{v(X)}$, nous obtenons :

$$\tilde{\Psi}(X) = \begin{cases} \Psi^+(u(X), v(X)) + \imath\Psi^-(u(X), v(X)) & \text{si } X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}^{reg} \\ \Psi^-(u(X), v(X)) & \text{si } X \in \mathfrak{a}_2^+ \end{cases},$$

Par ailleurs, pour tout $X \in \mathfrak{q}^{reg}$, on a

$$\mathcal{S}_{\lambda_1, \lambda_2}(u(X), v(X)) = ([\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}] + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}])(u(X), v(X))$$

$$+(\log |S(X)|)[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u(X), v(X)).$$

On introduit alors les fonctions suivantes

$$F_{ana} := \frac{[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v)}{u - v},$$

$$F_{sing} := \frac{[\Phi_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}](u, v) + [w_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v)}{u - v} + \log |uv| \frac{[\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}](u, v)}{u - v}$$

$$\text{et} \quad F_{A,B}^+ := Y(S_0) \frac{S^+(A, B)(u, v)}{u - v},$$

avec $(A, B) \in \{(\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}), (\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}^r), (W_{\lambda_1}^r, \Phi_{\lambda_2}), (W_{\lambda_1}^r, W_{\lambda_2}^r)\}$ (le polynôme $S_0 = Q^2 - 4S$ est à valeurs réelles sur \mathfrak{q} et $S_0(X) \geq 0$ si et seulement si $X \in H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$.)

Théorème 5.2.2. 1. Les fonctions F_{ana} , F_{sing} et $F_{A,B}^+$, avec $(A, B) \in \{(\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}), (\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}^r), (W_{\lambda_1}^r, \Phi_{\lambda_2}), (W_{\lambda_1}^r, W_{\lambda_2}^r)\}$ sont localement intégrables sur \mathcal{U} .

2. Ces fonctions forment une base des distributions propres invariantes sur \mathcal{U} données par une fonction de $L_{loc}^1(\mathcal{U})^H$.

Preuve : Soit F l'une des fonctions F_{ana} , F_{sing} ou $F_{A,B}^+$. Il suffit de montrer que, pour toute fonction f positive de $\mathcal{D}(\mathcal{U})$, l'intégrale $\int_{\mathfrak{q}} f |F|$ est finie. En notant, comme précédemment $\tilde{\Psi} = |\delta|F$, ceci revient à montrer grâce à la formule d'intégration de Weyl que, pour toute fonction f positive de $\mathcal{D}(\mathcal{U})$, la somme $\Sigma(f) = \int_{t_1 > t_2} |\Psi_{\mathfrak{m}}|(t_1, t_2) \mathcal{M}f_{\mathfrak{m}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + 8 \int_{\tau > 0} \int_{\theta > 0} |\Psi_2|(\tau, \theta) \mathcal{M}f_2(\tau, \theta) (\tau^2 + \theta^2) d\theta d\tau$ est finie.

Par partition de l'unité, il existe des fonctions $f_{\mathfrak{m}}$, f_3 et g_3 de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathfrak{q} de support inclus respectivement dans $H \cdot \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$, $H \cdot (\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+$ et $H \cdot \varpi((\mathfrak{z}_3 \cap \mathfrak{q})_+)$ telles que $f = f_{\mathfrak{m}} + f_3 + g_3$. La convergence des intégrales $\Sigma(g)$ pour $g = f_{\mathfrak{m}}$, f_3 ou g_3 découle des remarques 5.2.1, 5.2.5 et 5.2.6 (voir preuves des lemmes 5.2.1 et 5.2.3) ce qui donne la première assertion.

La deuxième assertion est alors une conséquence immédiate du théorème 5.2.1. ■

5.3 Perspectives sur les distributions propres invariantes de $L_{loc}^1(\mathfrak{q})^H$

Nous allons tout d'abord un lemme préciser la régularité des fonctions trouvées dans le théorème 5.2.2.

Lemme 5.3.1. *Les fonctions F_{ana} et F_{sing} s'expriment sous la forme suivante :*

$$F_{ana} = f_{ana}(Q, S_0) \quad \text{et} \quad F_{sing} = f_s(Q, S_0) + \log |S| g_s(Q, S_0)$$

où les fonctions f_{ana} , f_s et g_s sont holomorphes sur \mathbb{C} .

Preuve : Soient f et g deux fonctions holomorphes sur \mathbb{C} dont la série entière en zéro est de rayon de convergence infini. Alors, pour $(x, h) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$f(x+h)g(x-h) - f(x-h)g(x+h) = h \int_{-1}^1 (f'(x+th)g(x-th) - f(x+th)g'(x-th)) dt.$$

Ainsi, la fonction $(x, h) \mapsto \frac{f(x+h)g(x-h) - f(x-h)g(x+h)}{h}$ est holomorphe sur \mathbb{C}^2 . D'autre part, cette fonction est paire par rapport à h , donc elle admet un développement en série entière sur \mathbb{C}^2 de la forme $\sum_{0 \leq k, l} a_{k, l} x^k h^{2l}$.

Maintenant, pour $X \in \mathfrak{q}$, on considère $x = \frac{Q}{2}(X)$ et $h = \frac{\delta}{2}(X)$ de telle sorte que $u(X) = x + h$ et $v(X) = x - h$. On obtient alors

$$\frac{[f, g](u, v)}{\delta} = \sum_{0 \leq k, l} \frac{a_{k, l}}{2^{k+2l}} Q^k \delta^{2l} = \sum_{0 \leq k, l} \frac{a_{k, l}}{2^{k+2l}} Q^k S_0^l.$$

Les définitions de F_{ana} et F_{sing} donnent alors le résultat voulu . ■

Remarque 5.3.1. *La fonction $\delta = u - v$ correspond à un choix de racine carré du polynôme $S_0 = Q^2 - 4S$. Le lemme précédent exprime les fonctions F_{ana} et F_{sing} uniquement en terme des polynômes Q et S . Ces fonctions sont donc indépendantes du choix de cette racine carré.*

Corollaire 5.3.1. *L'espace des distributions propres invariantes sur \mathfrak{q} définies par une fonction analytique sur \mathfrak{q} est engendré par F_{ana} .*

Preuve : Comme les opérateurs $\partial(Q)$ et $\partial(S)$ sont polynomiaux, une simple intégration par parties sur \mathfrak{q} assure que F_{ana} définit bien une distribution propre invariante sur \mathfrak{q} . Le résultat voulu est alors immédiat. ■

Proposition 5.3.1. *La fonction F_{sing} est dans $L_{loc}^1(\mathfrak{q})^H$.*

Preuve : Il suffit de montrer que $\log |S| \in L_{loc}^1(\mathfrak{q})^H$ ou encore que pour toute fonction positive χ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{q})$, l'intégrale $\int_{\mathfrak{q}} |\log |S|| (X) \chi(X) dX$ est finie.

On a la décomposition $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \oplus \mathfrak{q}_2$, où $\mathfrak{q}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right); A \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$ et $\mathfrak{q}_2 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline B & 0 \end{array} \right); B \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$. Soient

\mathcal{Q}_1 (respectivement \mathcal{Q}_2) la forme quadratique définie sur \mathfrak{q}_1 (respectivement \mathfrak{q}_2) par

$$\mathcal{Q}_1 \left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right) = \det(A) \quad \left(\text{respectivement} \quad \mathcal{Q}_2 \left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline B & 0 \end{array} \right) \right) = \det(B) \right).$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{q}} |\log |S(X)|| \chi(X) dX &= \int_{\mathfrak{q}_1 \times \mathfrak{q}_2} |\log |\mathcal{Q}_1(X_1)| + \log |\mathcal{Q}_2(X_2)|| \chi(X_1 + X_2) dX_1 dX_2 \\ &\leq \int_{\mathfrak{q}_1 \times \mathfrak{q}_2} (|\log |\mathcal{Q}_1(X_1)|| + |\log |\mathcal{Q}_2(X_2)||) \chi(X_1 + X_2) dX_1 dX_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (|\log |t_1|| + |\log |t_2||) M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2} \chi(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

grâce à la relation 6 et au lemme 2.2.1. Comme les formes quadratiques \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q}_2 sont de signature (2, 2), alors le théorème 2.2.1 permet d'affirmer que $M_{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2} \chi(t_1, t_2)$ s'écrit sous la forme $\chi(t_1, t_2) = a(t_1, t_2) + |t_1|b(t_1, t_2) + |t_2|c(t_1, t_2) + |t_1 t_2|d(t_1, t_2)$, où a, b, c et d sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Ainsi la dernière intégrale est convergente. D'où le résultat. ■

La méthode de descente utilisée pour l'étude de l'intégrale orbitale $\mathcal{M}_H(f)$ d'une fonction f de $\mathcal{D}(\mathfrak{q})$ ne permet pas de décrire le comportement de $\mathcal{M}_H(f)$ au voisinage de 0.

Ainsi, il ne nous est pas possible de préciser l'intégrabilité sur \mathfrak{q} ou non des fonctions de la forme $F_{A,B}^+$ avec $(A, B) \in \{(\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_2}), (\Phi_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}^r), (W_{\lambda_1}^r, \Phi_{\lambda_2}), (W_{\lambda_1}^r, W_{\lambda_2}^r)\}$.

Pour la même raison, les intégrations par parties effectuées dans le paragraphe 5.2 ne sont pas forcément licites pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$. Par suite, bien que la fonction F_{sing} soit localement intégrable sur \mathfrak{q} , nous ne pouvons pas affirmer que cette fonction définit une distribution propre invariante sur \mathfrak{q} tout entier.

Références

- [1] S. Aoki et S. Kato, "Matching conditions for invariant eigendistributions on some semisimple symmetric spaces", Lie theory and its applications in physics V : Proceedings of the Fifth international workshop, World Scientific Publishing, 2004, p 74-83.
- [2] A. Bouaziz, "Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives", Invent. math., Vol. 115, 1994, p.163-207.
- [3] C.F. Dunkl, "Differential difference operators associated to reflection groups", Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 331, 1989, p.167-183.
- [4] J. Faraut et K. Harzallah, "Deux cours d'analyse harmonique", Progress in Mathematics, Vol. 69, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1987, Papers from the Tunis summer school held in Tunis, August 27-September 15, 1984.

- [5] J. Faraut, "Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques," J.Math.Pures.Appl., Vol. 58, 1979, p 359-444.
- [6] J. Faraut, "Noyaux sphériques sur un hyperboloïde à une nappe," Lecture Notes in Math., Vol 497, Springer-Verlag, Berlin and New-York, 1973.
- [7] Harish-Chandra, "Invariant distributions on Lie algebras," Amer. J. Math., Vol. 86, 1964, p. 271-309.
- [8] P. Harinck, "Fonctions orbitales sur $G_C/G_{\mathbb{R}}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel," J. Fonct. Anal., Vol. 153, 1998, p. 52-107.
- [9] G.J. Heckman "A remark on the Dunkl differential-difference operators," Proc. of the Bowdoin conference on harmonic analysis on reductive groups, 1989.
- [10] T. Hiraï, "Invariant eigendistribution of Laplace operators on real simple Lie groups. I. Case of $SU(p, q)$ " Japan J. of Math., Vol. 40, 1970, p. 1-68.
- [11] L. Hörmander, "The analysis of linear partial differential operators I. Distribution theory and Fourier analysis", Classics in Math., Springer 1990.
- [12] L. Hörmander, "An introduction to complex analysis in several variables," North-Holland Mathematical Library, Third Edition
- [13] E.L. Ince, "Ordinary Differential Equations," Dover Publications, Inc., 1956.
- [14] E.M. Opdam, "Dunkl operators, Bessel functions and the discriminant of a finite Coxeter group", Compositio Mathematica, tome 85, n°3 , 1993, p.333-373.
- [15] J. Orloff, "Orbital integrals on symmetric spaces, Noncommutative harmonic analysis and Lie groups" (Marseille-Luminy, 1985), Lecture Notes in Math., Vol 1243, Springer, Berlin, 1987, p. 198-239.
- [16] S. Sano, "Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples G_c/G ", Journal of Math. of Kyoto University, vol. 31, 2 1991, p 377-417.
- [17] J. Sekiguchi, "Invariant spherical hyperfunctions on the tangent space of a symmetric space", Algebraic groups and related topics, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 6, 1985, p. 83-126.
- [18] A. Tengstrand, "Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature", Math. Scand. 8 (1960), 201-218.
- [19] C. Torossian, "Deux résultats autour du théorème de restriction de Chevalley," Journal of Lie Theory, Vol 7, 2007, p.583-590.
- [20] C.Torossian, "Un théorème d'unicité pour les distributions sphériques sur l'espace tangent à un espace symétrique". Proceedings of the Japan Academy, Vol. 10 Serie A, 1996, p. 230-232.
- [21] V. S. Varadarajan, "Harmonic Analysis on Real Reductive Groups," Lecture Notes in Mathematics, Vol 576, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1977.
- [22] G. Van Dijk, "Invariant eigendistributions on the tangent space of a rank one semisimple symmetric space," Math. Ann., Vol. 268, 1984, p. 405-416.